

# L'accélérateur financier: la spécificité des petites et moyennes entreprises

A. Direr <sup>\*†</sup>

Avril 2004

## Abstract

Nous étudions un modèle parcimonieux de consommation et d'investissement des dirigeants de petites et moyennes entreprises en présence de coûts de vérification du résultat. L'investissement d'équilibre est toujours inférieur à celui avec information parfaite et fluctue positivement avec l'épargne de l'entrepreneur. Le modèle montre qu'un degré supérieur d'aversion à l'égard du risque génère une amplification et une plus grande persistance des chocs qui affectent la productivité des investissements. L'usage d'un contrat de dette réduit les coûts d'agence mais est directement à l'origine du phénomène d'amplification. La persistance des chocs s'explique par le désir de l'entrepreneur de lisser sa consommation au cours du temps.

## Introduction

Il existe actuellement un débat nourri sur l'influence des imperfections financières sur la demande de financement des agents privés. Si un certain nombre d'études empiriques concluent à l'importance du phénomène (Fazzari, Hubbard et Petersen (1988), Gilchrist et Himmelberg (1994, 1998), Kashyap, Stein et Wilcox (1993), Hoshi, Kashyap et Sharfstein (1991), Friedman et Kuttner (1993), Gertler et Gilchrist (1994)), d'autres aboutissent sur certains aspects à des résultats plus ambigus voire négatifs (Kaplan et Zingales (1997), Oliner et Rudebusch (1996), Cooper et Ejarque (1999)).

La validation empirique de la significativité d'un tel phénomène se heurte cependant à des problèmes d'identification importants. Parmi ces derniers se

---

\*PSE (unité jointe CNRS-EHESS-ENPC-ENS) et Cepremap. Correspondance: ENS, 48 Bld de Jourdan 75014 Paris. email: direr@ens.fr.

†Cet article est tiré du cinquième chapitre de ma thèse intitulé "Imperfections financières et dynamiques du marché du crédit". Je remercie à cette occasion Patrick Fève pour ses relectures et ses nombreux commentaires ainsi que le laboratoire d'Eurequa pour son accueil stimulant.

trouvent la difficulté de séparer les effets d'offre de crédit des facteurs de demande de financement (Friedman et Kuttner (1993)) ou encore le problème d'estimation de la part de la procyclicité de la demande de crédit qui est réellement attribuable à des imperfections financières (Eichenbaum (1994)) plutôt qu'à des variations normales des dépenses privées au cours du cycle.

Une stratégie alternative d'identification des imperfections financières au cours du cycle consiste à évaluer leur impact dans des économies artificielles étalonnées. Cette stratégie a été poursuivie par Fuerst (1994, 1995), Carlstrom et Fuerst (1997, 1998, 2000), Cooley et Nam (1998), Fisher (1994, 1999) et Bernanke, Gertler et Gilchrist (2000). Le mécanisme de propagation retenu par ces modèles repose sur une variation au cours du cycle des coûts d'agence (approximés par les coûts de faillite) qui altèrent les conditions de financement de l'investissement. Excepté le dernier article cité, les modèles mentionnés exhibent des effets de propagation financière quantitativement faibles, voire des effets d'amortissement<sup>1</sup>. Ces résultats négatifs proviennent notamment de la rigidité à court-terme des fonds propres qui freine l'accumulation en élevant instantanément le risque de faillite (Carlstrom et Fuerst (2000)). La prise en compte du comportement d'épargne des entrepreneurs, bien que plus réaliste, n'est pas strictement nécessaire à l'apparition d'un canal du crédit. Fisher (1999) et Cooley et Nam (1998) montrent dans ce cadre que les coûts de faillite ne varient pas suffisamment au cours du cycle pour engendrer un mécanisme significatif de propagation<sup>2</sup>.

Ces résultats défavorables permettent-ils de conclure à l'absence d'effets amplificateurs sur la demande de crédit et les dépenses des agents privés? La stratégie de quantification des coûts d'agence commune à l'ensemble de ces articles capte-t-elle raisonnablement les déterminants financiers de la demande de capital? Enfin, existe-t-il d'autres canaux de transmission négligés par ces travaux?

L'objet de cet article est de montrer qu'une des raisons possibles de la faiblesse des effets de propagation financière réside dans l'hypothèse particulière de neutralité à l'égard du risque des entrepreneurs habituellement faite dans ces modèles. Nous poursuivons l'introduction en montrant tout d'abord pourquoi un degré réaliste d'aversion à l'égard du risque pour les entrepreneurs est une étape importante vers un plus grand réalisme de ce type de modèle. Nous abordons ensuite ses conséquences sur les choix

---

<sup>1</sup>Voir Carlstrom et Fuerst (2000) pour une discussion des résultats particuliers obtenus par Bernanke, Gertler et Gilchrist (2000).

<sup>2</sup>Cooley et Nam (1998) montrent également qu'une variation du montant des réserves obligatoires peut créer un effet d'amplification important. Cet effet ne résulte cependant pas des coûts d'agence mais repose sur l'hypothèse de participation limitée retenue sur le marché de la monnaie.

d'investissement des entreprises. Nous clôturons l'introduction en situant l'apport du modèle par rapport à la littérature traitant des déterminants financiers de l'investissement.

### Le degré d'aversion au risque des dirigeants/propriétaires des petites et moyennes entreprises

L'hypothèse de neutralité à l'égard du risque est une approximation convenable des comportements réels dès lors que les agents sont capables de diversifier leur richesse dans des actifs aux risques non ou faiblement corrélés positivement. La diversification des actifs d'entreprises rencontre à cet égard des difficultés particulières. Il est en effet généralement constaté une absence de diversification financière des propriétaires parmi les petites et moyennes entreprises. Dans une étude portant sur un échantillon de 692 entreprises américaines, James et al. (1995) confirment la présomption générale que les prêteurs externes imposent aux propriétaires des engagements financiers personnels d'une ampleur telle qu'ils rendent caduque toute séparation entre leur participation financière et le reste de leur richesse personnelle. De plus, les auteurs observent une absence de séparation même pour les entreprises à responsabilité limitée *via* la demande d'hypothèques ou de cautions personnelles. Ce résultat d'absence de séparation a été récemment confirmé par l'étude empirique de Berger et Udell (1998, p. 626) à partir d'une population différente d'entreprises.

Les exigences des prêteurs empêchent ainsi les propriétaires de diversifier leur risque de portefeuille comme le ferait tout bon gestionnaire. Cette particularité met directement en cause l'hypothèse de neutralité à l'égard du risque du propriétaire comme approximation convenable de leur comportement d'investissement et de placement.

Le défaut de séparation des actifs est non seulement réaliste mais également explicable par les problèmes d'incitation qui touchent cette catégorie d'entreprises. Une participation financière élevée du propriétaire permet en effet, en présence d'asymétrie d'information, de rapprocher les intérêts contradictoires des deux parties du contrat. La collatéralisation de la richesse est ainsi un moyen de réduire le rationnement du crédit (Bester (1985), B-sanko et Thakor (1987)) ou de diminuer les coûts de faillite (Gale et Hellwig (1985)) et de détresse financière. Les prêteurs sont par ailleurs d'autant plus incités à réclamer des garanties personnelles au propriétaire que ce dernier est généralement le dirigeant de son entreprise. Les garanties permettent dans ce cas de favoriser son effort de gestion et de réduire le risque des projets d'investissement (Boot et al. (1991)). L'étude de Berger et Udell (1998) portant sur un large échantillon de petites entreprises américaines en 1993 montre à ce sujet que 86% des entreprises de l'échantillon sont gérées

directement par leur propriétaire.

La population d'entreprises retenue est également cohérente avec les études empiriques qui montrent qu'une large part des ajustements en période de récession repose sur les petites et moyennes entreprises. La raison invoquée généralement a également trait aux problèmes d'information rencontrés par ces entreprises (Gertler et Gilchrist (1995), Bernanke, Gertler et Gilchrist (1996)).

A l'inverse, les travaux théoriques existants étudient les effets des imperfections financières sur les dépenses des entreprises dans un cadre avec neutralité à l'égard du risque. L'hypothèse d'aversion au risque constitue toutefois un point de départ naturel pour expliquer le comportement des entreprises handicapées par des problèmes d'incitation dans la mesure où ces mêmes problèmes d'incitation empêchent le propriétaire-dirigeant de diversifier ses risques financiers.

Cette hypothèse de neutralité pourrait toutefois représenter une simplification acceptable si elle n'altérait que faiblement la nature des mécanismes de propagation mis en évidence dans les modèles d'accélérateur financier cités. Un des objectifs de ce papier est d'étudier dans quelle mesure cet aspect de la réalité peut être ou non négligé.

## Investissement et aversion au risque

Nous présentons une analyse à la fois qualitative et numérique du choix d'investissement avec asymétrie d'information et aversion à l'égard du risque. L'endettement de l'entreprise fait dans ce cadre l'objet d'un arbitrage. D'un côté, un endettement supérieur lui permet d'accroître ses profits espérés en augmentant l'échelle de production. De l'autre côté la dégradation de la structure financière qui s'en suit accroît la volatilité des profits. Un endettement croissant conduit ainsi à une probabilité supérieure de défaillance, ce qui réduit la valeur de l'entreprise en présence de coûts de faillite.

L'augmentation des fonds propres via le réinvestissement des profits modifie favorablement cet arbitrage. Elle permet à l'entreprise de diminuer la probabilité de défaillance et d'accroître ainsi l'échelle de production. Nous obtenons par ce biais un lien naturel entre fonds propres et investissement qui est au centre de la littérature traitant de l'accélérateur financier.

L'hypothèse d'aversion au risque de l'entrepreneur enrichit le modèle d'investissement essentiellement de deux manières. L'agent fait maintenant face à un second arbitrage entre consommer aujourd'hui et investir son épargne dans son entreprise avec les effets favorables indiqués sur la production future. Cet arbitrage dépend une fois encore de son niveau courant de richesse et ajoute un canal additionnel d'amplification financière. Supposons par exemple que l'entreprise subisse un événement défavorable qui réduise ses fonds propres. La hausse du coût du capital les périodes suivantes

incite l'entrepreneur à épargner une fraction supérieure de sa richesse et à améliorer sa structure financière. Cet ajustement se fera cependant d'autant plus lentement que l'entrepreneur souhaite lisser sa consommation pendant la transition. Ce mécanisme, en freinant le retour au ratio de fonds propres de long terme, entraîne potentiellement des effets de persistance des chocs.

Par ailleurs, la répartition des droits de l'entreprise entre les deux parties du contrat et entre les états de la nature a des conséquences sur l'investissement si l'entrepreneur est averse à l'égard du risque. Avec un financement externe sous forme de contrat de dette, l'entrepreneur est le détenteur des droits résiduels. La dispersion de la consommation entre les états de la nature que cela implique est particulièrement défavorable pour l'investissement en présence d'aversion au risque. De plus, cet effet est *a priori* d'autant plus présent que la part des fonds propres de l'entrepreneur dans l'entreprise est faible et ce, en raison de la volatilité des profits qui en résulte. Un choc négatif a pour effet de réduire instantanément l'investissement *via* la baisse des fonds propres. Il existe donc parallèlement un mécanisme d'amplification que nous explorons.

## Littérature reliée

Le conflit entre incitations et assurance dans la relation principal-agent a été abondamment étudié par la littérature avec des implications fondamentales sur la forme des contrats d'assurance ou sur les mécanismes d'incitations des travailleurs. Ses implications concernant l'investissement ont été cependant peu explorées jusqu'à présent, même si le type de problèmes posés est relativement intuitif. Par exemple, Berger et Udell (1998), relevant le manque de séparation entre la richesse financière et personnelle de l'entrepreneur, notent qu'un propriétaire ayant placé toute sa richesse dans son entreprise est susceptible de retenir des projets peu risqués ne maximisant pas la valeur de l'entreprise.

Les liens entre aversion au risque et asymétrie d'information dans un cadre financier ont été en premier explorés par Leland et Pyle (1978). Ils montrent qu'en présence d'incertitude sur la qualité des entreprises, l'entrepreneur a intérêt à placer un montant minimum de sa richesse dans son entreprise afin de signaler de manière crédible sa qualité aux investisseurs. La participation de l'entrepreneur est coûteuse puisqu'elle entraîne une diversification imparfaite de ses actifs. Mais elle lui permet en contre-partie de bénéficier d'une prime de risque plus faible. L'arbitrage entre assurance et rendement moyen des actions est proche dans l'esprit de celui modèle à ceci près que la participation de l'entrepreneur permet ici non pas de se signaler mais de réduire la probabilité de défaut et les coûts d'agence associés.

Le modèle de Leland et Pyle est cependant incomplet dans la mesure où il n'explique pas pourquoi les investisseurs vendent des contrats de dette plutôt

que d'autres formes contractuelles. Townsend (1979) endogénéise à l'inverse le contrat financier. Il étudie le schéma de transfert entre deux individus averses à l'égard du risque quand l'un des deux, l'agent, doit payer un coût d'audit pour authentifier auprès du second, le principal, son revenu réalisé. Le contrat optimal est un contrat dans lequel le principal réclame un revenu fixe dans les états non vérifiés. Townsend interprète cette caractéristique comme l'élément d'un contrat de dette. Garino et Simmons (1998) notent toutefois que dans le cas d'un agent averse à l'égard du risque, le contrat d'équilibre implique que la consommation garantie dans les états vérifiés, c'est à dire de "faillite", est supérieure à celle dans l'état non vérifié le plus défavorable. Le contrat optimal s'éloigne alors d'un simple contrat de dette. Une caractéristique plus conforme avec les propriétés d'un contrat d'action pour l'agent peut être toutefois obtenue en supposant comme chez Innes (1987) que le revenu contractuel de l'agent est une fonction non décroissante de la production. Ce point est suggéré informellement par Hellwig (1998) et est analysé plus longuement ici.

Le modèle de Townsend met l'accent sur le défaut d'assurance que l'asymétrie d'information entraîne alors que le modèle présenté se concentre sur les conséquences en termes d'investissement. L'objectif de Gale et Hellwig (1985) est d'étudier la décision d'investissement dans un environnement avec asymétrie d'information *ex post*. Notre modèle est à cet égard plus proche de leur problématique. Ils montrent que l'investissement de second rang est inférieur à l'investissement avec information parfaite s'il existe une probabilité positive de faillite et simultanément si l'accroissement de l'investissement augmente les coûts de faillite dans tous les états de la nature. L'essentiel de leur analyse concerne le cas de neutralité à l'égard du risque. Ils montrent toutefois que le résultat de sous-investissement se généralise avec aversion au risque sous les deux mêmes conditions. A cet égard, un des apports de ce papier est de montrer que la condition de probabilité positive de faillite n'est plus nécessaire à un effet sur l'investissement dès lors que l'agent est averse au risque. Cette particularité a, comme nous le verrons, des conséquences importantes sur la pertinence d'estimer les effets financiers sur l'investissement à partir des seules variations du taux de faillite.

Enfin, la problématique du modèle est étroitement reliée à la littérature traitant de l'accélérateur financier (articles cités au début de l'introduction). Nous cherchons ainsi à étudier dans quelle mesure les imperfections financières entraînent des effets d'amplification et de persistance des chocs sur l'investissement. Les modèles ne sont toutefois pas complètement comparables. Contrairement aux premiers, le modèle n'étudie pas les implications d'un risque agrégé sur l'économie. L'analyse est faite dans un cadre d'équilibre partiel dans lequel le taux d'intérêt sans risque reste constant au

cours du temps<sup>3</sup>.

L'exposition de l'article suit le plan suivant. Nous commençons par décrire dans une deuxième section l'environnement qui fonde la relation principal-agent entre l'investisseur et le prêteur. La troisième section établit le contrat financier optimal et la quatrième section en donne une interprétation intuitive. La caractérisation du contrat nous permet ensuite dans la cinquième section de présenter les conditions d'optimalité de la dette, de l'investissement et de la richesse garantie de l'entrepreneur. L'économie simulée est présentée dans la sixième section puis les résultats dans la septième section, ce qui nous permet finalement de conclure. La méthode de résolution numérique est placée en annexe.

## 1 L'environnement

Il existe deux individus: un entrepreneur averse à l'égard du risque appelé également l'agent et un principal neutre à l'égard du risque. Le principal est supposé accéder à un marché financier parfait dans lequel le facteur sans risque, noté  $X$ , est constant au cours du temps. Il prête  $b_t \geq 0$  à l'agent si celui-ci a une position débitrice et lui emprunte  $b_t < 0$  si sa position est créditrice<sup>4</sup>. L'agent a une durée de vie infinie. Il doit choisir à chaque date  $t = 0, 1, \dots$  sa consommation  $c_t$  et le montant investi  $k_t$  dans la production. Le capital est le seul facteur de production et se déprécie complètement après l'usage d'une période (investissement et capital sont donc employés indifféremment dans la suite). La production en  $t + 1$  dépend du capital  $k_t$  et est égale à  $y_{t+1} = \alpha_{t+1}f(k_t)$  avec  $f(\cdot)$  strictement croissant et strictement concave.  $\alpha_{t+1}$  est une variable aléatoire i.i.d. au cours du temps, caractérisée par la fonction de densité  $g(\cdot)$  et la fonction de répartition  $G(\cdot)$ . Son ensemble de définition est  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  avec  $\underline{\alpha} \geq 0$  et  $\bar{\alpha} < \infty$ . La fonction d'utilité  $U(\cdot)$  est strictement croissante et strictement concave. Les fonctions  $U(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  et  $G(\cdot)$  sont toutes prises deux fois continûment différentiables.

Notons finalement  $\theta(k_t, b_t, y_{t+1})$  le transfert entre le principal et l'agent qui est positif ou négatif selon la position financière de l'agent. La fonction de transfert représente le terme d'un contrat: si l'entrepreneur investit  $k_t$ , emprunte  $b_t$  et si le résultat de la période suivante est  $y_{t+1}$ , alors l'agent

---

<sup>3</sup>L'étude de la réponse d'une entreprise aux chocs individuels permet toutefois de suggérer ce que seraient les propriétés cycliques de l'investissement avec choc agrégé. Un cadre d'équilibre général a l'avantage de permettre d'analyser les variations de l'investissement imputables aux fluctuations du taux d'intérêt sans risque. Ce canal devrait toutefois être limité en pratique dans la mesure où les fluctuations du taux sans risque sont faiblement corrélées dans la réalité avec le produit et l'investissement (Beaudry et Guay (1996)).

<sup>4</sup>Sans précision sur le signe de  $b_t$ , les interprétations du contrat concerneront le cas le plus intéressant d'un endettement de l'agent soit  $b_t > 0$ .

s'engage à payer  $\theta(k_t, b_t, y_{t+1})$  au principal si  $\theta(k_t, b_t, y_{t+1}) > 0$  et inversement le principal rembourse  $\theta(k_t, b_t, y_{t+1})$  à l'agent si  $\theta(k_t, b_t, y_{t+1}) < 0$ .

Deux types d'imperfections viennent toutefois contraindre le schéma de répartition du surplus entre les parties. La première se manifeste par le fait que le principal doit déboursier le montant  $z(k_t)$  pour observer le produit  $y_{t+1}$  alors que l'entrepreneur l'observe gratuitement. Les coûts d'audit  $z(k_t)$  sont une fonction du capital investi supposée deux fois différentiable. Les conséquences de cette hypothèse ont été traitées extensivement par Townsend (1979), Gale et Hellwig (1984) et Williamson (1987a) dans un cadre à deux périodes et agents neutres à l'égard du risque.

La seconde imperfection financière se traduit par l'impossibilité pour le principal d'observer l'endettement à très court terme de l'entrepreneur (c'est à dire à l'intérieur de la période). L'entrepreneur est en effet supposé avoir accès à une source alternative et privée de financement de court terme. Concrètement, après l'observation de la production réalisée, l'entrepreneur peut, avant d'annoncer le résultat et éventuellement d'être audité, emprunter le montant  $d_{t+1}$ . Cette somme est inobservable pour le principal et vient s'ajouter aux revenus tirés de la production. La décision d'audit entraîne l'observation de  $\tilde{y}_{t+1} = \alpha_{t+1}f(k_t) + d_{t+1}$  sans toutefois la possibilité de distinguer les deux sources de revenus. Après réalisation des termes du contrat et du transfert  $\theta(k_t, b_t, y_{t+1})$ , l'entrepreneur rembourse l'emprunt  $d_{t+1}$  à la fin de la même période à un taux d'intérêt égal à zéro par simplicité.

Cette asymétrie d'information impose comme nous le verrons une contrainte supplémentaire sur la classe des contrats financiers possibles. Elle a précédemment été retenue dans la littérature par Innes (1987, 1993). Celui-ci montre sous cette hypothèse que le contrat de dette est une forme contractuelle optimale qui permet de minimiser les problèmes d'aléa moral ou de sélection adverse.

Nous simplifions la solution du contrat en retenant l'hypothèse que le principal peut s'engager *ex ante* à vérifier le résultat et ne peut rendre aléatoire sa décision d'audit. De plus, nous supposerons que l'entrepreneur place à chaque date la totalité de sa richesse dans son projet d'investissement. Cette hypothèse se fait sans perte de généralité comme nous le verrons au moment de l'interprétation du contrat optimal.

Il est commode de définir la richesse  $\psi(k_t, b_t, y_{t+1})$  laissée contractuellement à l'agent en  $t + 1$ . Elle comprend la production courante moins le transfert:

$$\psi(k_t, b_t, y_{t+1}) \equiv y_{t+1} - \theta(k_t, b_t, y_{t+1})$$

Le principal laisse une richesse négative à l'agent si  $\theta(k_t, b_t, y_{t+1}) > y_{t+1}$ . L'agent débute dans ce cas la période avec une position nette débitrice. Supposons qu'il existe une borne inférieure à  $\psi(k_t, b_t, y_{t+1})$  notée  $L$  qui s'interprète comme une limite d'endettement. La borne inférieure de la

richesse contractuelle peut toutefois être supérieure à  $L$  si la production additionnée à la borne d'endettement sont toujours suffisants pour rembourser la dette  $b_t$  au taux certain, soit si  $\underline{\alpha}f(k_t) + L \geq Xb_t$ .

Si à l'inverse  $\underline{\alpha}f(k_t) + L < Xb_t$ , l'endettement est trop important pour que l'agent puisse collatéraliser complètement la dette exigible. Il existe alors toujours des états de  $\alpha_{t+1}$  dans lesquels la production de l'entrepreneur est auditée. Cette contrainte exprime la condition de participation limitée de l'agent. Elle implique que le principal ne peut prélever un montant arbitrairement grand à chaque date sans violer la contrainte de solvabilité intertemporelle de l'agent ou sa borne d'endettement.

La chronologie est la suivante. L'entrepreneur débute la période avec la richesse  $\psi(k_{t-1}, b_{t-1}, y_t) \geq -L$ , qu'il répartit entre sa consommation et son investissement. Un solde positif  $b_t = \psi(k_{t-1}, b_{t-1}, y_t) - c_t - k_t > 0$  est prêté au principal tandis qu'un solde négatif représente un emprunt auprès du principal. En début de période suivante, l'entrepreneur observe de façon privée  $y_{t+1}$ , complète éventuellement ses revenus en empruntant  $d_{t+1}$  et annonce  $\hat{y}_{t+1}$  au principal. Ce dernier conditionne le transfert  $\theta(k_t, b_t, y_{t+1})$  à l'annonce  $\hat{y}_{t+1}$  s'il décide de ne pas auditer ou à  $\tilde{y}_{t+1} = \alpha_{t+1}f(k_t) + d_{t+1}$  s'il vérifie le revenu total de l'entrepreneur. Enfin, l'entrepreneur rembourse  $d_{t+1}$  et répartit la richesse restante  $\psi(k_t, b_t, y_{t+1})$  entre sa consommation  $c_{t+1}$  et son nouvel investissement  $k_{t+1}$ , le solde  $b_{t+1}$  représentant sa position financière nette en fin de période  $t + 1$ .

Nous restreignons l'analyse aux contrats compatibles avec les incitations. Nous cherchons par conséquent des contrats qui conduisent à chaque période l'entrepreneur à annoncer le niveau réel d'activité au principal ainsi qu'à choisir  $d_{t+1} = 0$ . La variable  $\alpha_{t+1}$  fait donc dans la suite indifféremment référence à la réalisation de l'aléa qu'à son annonce.

Il est important de noter que ces deux restrictions se font sans perte de généralité. En vertu du principe de révélation, si un contrat optimal existe impliquant des annonces  $\hat{y}_{t+1} \neq \alpha_{t+1}f(k_t) + d_{t+1}$ , alors il existe nécessairement un contrat révélateur aboutissant à une répartition effective identique des ressources d'une période à l'autre et entre les états de la nature (voir à ce sujet Myerson (1979), Harris et Townsend (1981) et Green et Laffont (1986)). De la même manière, s'il existe des mécanismes de transfert optimaux incluant  $d_{t+1} > 0$  pour certaines réalisations de l'aléa, le principal peut toujours prendre directement en compte l'incitation de l'agent et ne proposer que des contrats impliquant  $d_{t+1} = 0$ . Cette seconde condition est appelée dans la suite la condition de non-endettement intrapériodique (NE).

Puisque nous nous limitons aux contrats compatibles avec les incitations, nous écrivons dorénavant la fonction de transfert par rapport à l'aléa réalisé:  $\theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1})$ , de même pour la richesse contractuelle correspondante:

$$\psi(k_t, b_t, \alpha_{t+1}) \equiv \alpha_{t+1}f(k_t) - \theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1}).$$

Le contrat financier qui lie l'entrepreneur et le principal peut finalement être résumé par la richesse contingente  $\psi(k_t, b_t, \alpha_{t+1})$  ainsi que par la variable indicatrice  $v(k_t, b_t, \alpha_{t+1})$ , égale à 1 si le principal vérifie l'annonce de l'entrepreneur et 0 dans le cas inverse.

Notons  $a_t$  la richesse de l'agent en début de période. Le programme intertemporel (P1) de l'entrepreneur s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\{k_s, b_s, \psi, v\}} E_t \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} U(c_s) \\ \text{s.c.} \quad a_s + b_s - k_s - c_s = 0 \\ \quad \quad a_s = \psi(k_{s-1}, b_{s-1}, \alpha_s) \\ \int_{\underline{\alpha}}^{\bar{\alpha}} [\alpha_{s+1} f(k_s) - \psi(k_s, b_s, \alpha_{s+1}) - v(k_s, b_s, \alpha_{s+1}) z(k_s)] dG(\alpha_{s+1}) = Xb_s \quad (\text{NA}) \\ \quad \quad \psi(k_s, b_s, \alpha_{s+1}) \geq \max \{-L, \underline{\alpha} f(k_s) - Xb_s\} \quad (\text{PL}) \\ \quad \quad c_s \geq 0 \end{array} \right.$$

Les termes du contrat doivent maximiser l'utilité intertemporelle de l'agent tout en satisfaisant (i) la contrainte de révélation de l'aléa par l'agent, (ii) la condition (NE) de non-endettement intra-période  $d_{s+1} = 0$ , (iii) la condition de participation limitée de l'agent (PL) et (iv) la condition de non-arbitrage du principal (NA). Cette dernière condition indique que le principal doit être indifférent en espérance entre prêter (emprunter) la somme  $b_s$  à l'entrepreneur et placer (emprunter) la même somme au facteur sans risque  $X$ . En cas d'audit, le principal saisit la totalité de la production, paie les coûts d'audit et redistribue à l'agent le montant contractuel  $\psi(k_s, b_s, \alpha_{s+1})$ .

D'un point de vue technique, le programme (P1) a une variable d'état qui est la richesse de l'entrepreneur de début de période  $a_s$ , et quatre variables de contrôle dont, pour le moment, deux variables  $\psi(k_s, b_s, \alpha_{s+1})$  et  $v(k_s, b_s, \alpha_{s+1})$  qui sont des fonctions de l'aléa de demain <sup>5</sup>. Nous passons maintenant à l'étude du contrat optimal.

## 2 Le contrat optimal

L'hypothèse de concurrence sur le marché du crédit permet à l'entrepreneur d'obtenir le contrat optimal  $\{\psi(k_t, b_t, \alpha_{t+1}), v(k_t, b_t, \alpha_{t+1})\}$  qui maximise son utilité intertemporelle. Une fois choisis  $k_t$  et  $b_t$ , le contrat est encore contingent à la réalisation de l'aléa en début de période suivante. Définissons l'ensemble  $\mathcal{A} \subset [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  des états annoncés audités par le principal ainsi que l'ensemble complémentaire des valeurs non inspectées  $\mathcal{B}$ . Nous procédons par étape et commençons par étudier les implications sur le contrat de la

<sup>5</sup>La variable d'état  $a_s = \psi(k_{s-1}, b_{s-1}, \alpha_s)$ , simple scalaire à la période  $s$ , ne doit pas être confondue avec la variable de contrôle  $\psi(k_s, b_s, \alpha_{s+1})$  qui est une fonction de l'aléa de demain.

condition de révélation. Outre la condition de révélation, le contrat doit également maximiser l'utilité de l'agent. Dans les modèles avec neutralité au risque, cela se résume à minimiser la région inspectée sous la contrainte de révélation, la condition de participation limitée (PL) et la condition de non-arbitrage (NA) (Gale et Hellwig (1985), Williamson (1987)).

L'aversion au risque ainsi que la condition de non-endettement intrapériodique (NE) impliquent ici des contraintes supplémentaires. Nous adoptons alors la démarche suivante. Après avoir présenté les contraintes sur le transfert qu'impose la condition (NE), nous mettons en évidence une condition d'assurance de la consommation que devrait satisfaire tout contrat financier sans égard dans un premier temps à la condition (NE). Nous étudions finalement les conséquences de (NE) sur le contrat optimal et la condition d'assurance modifiée.

## 2.1 La condition de révélation

Supposons vérifiée la condition (NE). Les implications de la condition de révélation sur le transfert sont alors les suivantes <sup>6</sup>:

**Proposition 1.** *Un contrat financier satisfait la condition de révélation si (i)  $\theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1}) = \theta(k_t, b_t) \forall \alpha_{t+1} \in \mathcal{B}$  et (ii)  $\theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1}) \leq \theta(k_t, b_t) \forall \alpha_{t+1} \in \mathcal{A}$ .*

**Démonstration.** L'absence d'audit implique que le transfert entre le principal et l'agent doit être indépendant de l'annonce  $\alpha_{t+1}$ . Dans le cas contraire, l'agent annoncerait systématiquement  $\alpha_{t+1} = \arg \min \theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1})$ , ce qui rendrait également constant le transfert  $\theta$  dans l'espace non audité. De plus, le transfert en cas d'audit ne peut être supérieur à celui en l'absence d'audit. L'agent annoncerait sinon une valeur non auditée de l'aléa.  $\square$

L'hypothèse de coûts de vérification du résultat aboutit donc à la constance du transfert noté  $\theta(k_t, b_t)$  dans les états non audités.

## 2.2 La condition de non-endettement intrapériodique

Les implications de la condition (NE) sur le mécanisme de transfert sont les suivantes:

---

<sup>6</sup>Voir également Townsend (1979). Des démonstrations similaires avec un entrepreneur neutre à l'égard du risque peuvent être trouvées dans Gale et Hellwig (1984) ou Williamson (1987a).

**Proposition 2.** *Un contrat financier satisfait la condition (NE) de non-endettement intrapériodique  $d_{t+1} = 0$  si  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \subset [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  et  $\alpha_1 < \alpha_2 \Leftrightarrow \theta(k_t, b_t, \alpha_1) \leq \theta(k_t, b_t, \alpha_2)$ .*

**Démonstration.** Supposons à l'inverse  $\theta(k_t, b_t, \alpha_1) > \theta(k_t, b_t, \alpha_2)$ . Dans le cas où l'entrepreneur observerait  $\alpha_{t+1} = \alpha_1$ , celui-ci emprunterait la différence  $d_{t+1} = \alpha_2 f(k_t) - \alpha_{t+1} f(k_t)$  et rembourserait le montant inférieur  $\theta(k_t, b_t, \alpha_2)$  (ou, si l'agent est crédeur, recevrait le montant supérieur  $\theta(k_t, b_t, \alpha_2)$ ). Enfin, la décision d'auditer est indépendante du choix de  $d_{t+1}$  puisque l'audit ne permet pas de distinguer la production de l'emprunt.  $\square$

En présence d'une source privée de financement à court-terme et sous la condition  $d_{t+1} = 0$ , le transfert de l'agent vers le principal ne peut donc décroître avec la production. Remarquons, au vu de la démonstration, que l'extension à d'autres types de contrats optimaux induisant  $d_{t+1} > 0$  pour certaines réalisations de l'aléa, ne remettrait pas en cause le résultat de non-décroissance du transfert effectif.

### 2.3 L'assurance de la consommation

Outre la condition de révélation, le contrat doit également permettre à l'agent de répartir le plus uniformément possible sa consommation entre les états de la nature. Par souci de clarté, nous faisons pour le moment abstraction de la condition (NE). Nous verrons dans un second temps de quelle façon cette condition altère le principe d'assurance que nous exposons maintenant. Celui-ci s'exprime ainsi <sup>7</sup>:

**Proposition 3.** *Sous la condition de révélation mais en l'absence de la contrainte (NE), un contrat optimal satisfait les deux conditions d'assurance suivantes:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & c_{t+1} = c_{t+1}^a \quad \forall \alpha_{t+1} \in \mathcal{A} \\ (ii) \quad & \frac{\int_{\mathcal{B}} U'(c_{t+1}) dG(\alpha_{t+1})}{\int_{\mathcal{B}} dG(\alpha_{t+1})} = U'(c_{t+1}^a) \end{aligned}$$

avec  $c_{t+1}^a$  un niveau constant de consommation dans les états audités.

**Démonstration.** Le programme (P1) peut être réécrit sous la forme d'un Lagrangien:

---

<sup>7</sup>Une condition identique a été trouvée par Garino et Simmons (1998) dans un cadre à deux périodes.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & U(c_t) + \lambda_t[\psi(k_{t-1}, b_{t-1}, \alpha_t) + b_t - c_t - k_t] \\
& + \beta \eta_t \left\{ \int_{\mathcal{A}} [\alpha_{t+1} f(k_t) - \psi(k_t, b_t, \alpha_{t+1}) - v(k_t)] dG(\alpha_{t+1}) + \theta_t \int_{\mathcal{B}} dG(\alpha_{t+1}) - X b_t \right\} \\
& + \beta \int_{\mathcal{A}} \lambda(\alpha_{t+1}) [\psi(k_t, b_t, \alpha_{t+1}) + b_{t+1} - c_{t+1} - k_{t+1}] dG(\alpha_{t+1}) \\
& + \beta \int_{\mathcal{B}} \lambda(\alpha_{t+1}) [\alpha_{t+1} f(k_t) - \theta_t + b_{t+1} - c_{t+1} - k_{t+1}] dG(\alpha_{t+1}) \\
& + E_t \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-t} \{ U(c_s) \\
& + \eta_s \left[ \int_{\underline{\alpha}}^{\bar{\alpha}} [\alpha_{s+1} f(k_s) - \psi(k_s, b_s, \alpha_{s+1}) - v_{s+1} v(k_s)] dG(\alpha_{s+1}) - X b_s \right] \\
& + \lambda(\alpha_{s+1}) [\psi(k_s, b_s, \alpha_{s+1}) + b_{s+1} - k_{s+1} - c_{s+1}] \}
\end{aligned}$$

L'écriture des contraintes prend en compte les résultats de la proposition 1. Les termes de la période  $t$  sont développés ainsi que la contrainte budgétaire de la période  $t + 1$  (3ème et 4ème lignes). Le coefficient  $\lambda(\alpha_{t+1})$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire en  $t + 1$  si l'aléa de cette période est égal à  $\alpha_{t+1}$ . Il existe donc un multiplicateur pour chaque état de la nature en  $t + 1$ . Les contraintes budgétaires sont également séparées selon que l'état est inspecté ou non. Le multiplicateur  $\eta_t$  est associé à la contrainte (NA) du principal. L'annulation des dérivées du Lagrangien par rapport à  $c_t$ , à la richesse  $\psi_{t+1}$  de l'entrepreneur dans les états audités et au transfert  $\theta_t$  dans les états non audités donnent respectivement:

$$\left\{ \begin{array}{l} U'(c_t) = \lambda(\alpha_t) \\ \lambda(\alpha_{t+1}) = \eta_t \quad \forall \alpha_{t+1} \in \mathcal{A} \\ \int_{\mathcal{B}} \lambda(\alpha_{t+1}) dG(\alpha_{t+1}) = \eta_t \int_{\mathcal{B}} dG(\alpha_{t+1}) \end{array} \right.$$

De ces trois conditions, nous pouvons directement tirer les deux conditions d'optimalité de la proposition 3.  $\square$

La proposition 3 impose deux types de contraintes sur la répartition de la consommation entre les états de la nature. Premièrement, la vérification des états doit permettre d'assurer complètement la consommation de l'agent dans les états vérifiés. Deuxièmement, l'espérance de l'utilité marginale conditionnelle à l'absence d'audit doit être égale à l'utilité marginale des états inspectés. C'est une condition d'assurance maximale en présence d'asymétrie d'information *ex post*. En effet, l'impossibilité de distinguer les événements dans les états non inspectés empêche le principal d'assurer la consommation dans chacun de ces états. Le contrat étant défini sur les richesses, la proposition 3 produit la conséquence suivante sur le contrat optimal:

**Proposition 4.** *Soit  $c_t = c(a_t)$  la politique optimale de consommation de l'agent solution du problème (P1). Si  $c'(a) > 0 \forall a$  alors  $\psi(k_t, b_t, \alpha_{t+1}) = \psi(k_t, b_t) \forall \alpha_{t+1} \in \mathcal{A}$ .*

**Démonstration.** Découle directement du point (i) de la proposition 3.

□

En d'autres termes, si l'agent accroît sa consommation avec sa richesse, la seule possibilité pour le principal de stabiliser la consommation est de transférer un montant fixe  $\psi(k_t, b_t)$  de richesse à l'agent dans les états audités.

Les deux conditions d'assurance optimale de la proposition 3 ne déterminent pas complètement ce que devrait être le contrat financier et l'ampleur de l'assurance dans la mesure où elles sont silencieuses sur les valeurs particulières de  $\mathcal{A}$  audités. Par comparaison, dans le cas où l'agent est neutre à l'égard du risque, ces questions sont fixées par la contrainte de minimisation des coûts moyens de vérification. Dans le cadre présent, l'objectif de minimisation des coûts d'agence est contrebalancé par l'objectif conflictuel d'assurance de la consommation. L'ensemble des états audités sur  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  devient dans ce cas plus complexe à déterminer. Comme nous allons cependant le voir, la prise en compte de la condition (NE) va simplifier la caractérisation du contrat optimal.

## 2.4 La condition d'assurance modifiée

Remarquons que la condition (i) d'assurance des états audités de la proposition 3 ainsi que la proposition 4 satisfont naturellement la condition (NE). Il en va différemment de la condition (ii) de la proposition 3.

**Proposition 5.** *Soit le seuil d'audit*

$$\varphi(k_t, b_t) = [\theta(k_t, b_t) + \psi(k_t, b_t)]/f(k_t) \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}].$$

*Sous les conditions de révélation et de non-endettement (NE) et si  $c'(a) > 0$   $\forall a$ , un contrat financier optimal se caractérise par  $\mathcal{A} = [\underline{\alpha}, \varphi_t]$ <sup>8</sup> ainsi que par:*

$$\theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1}) = \min(\alpha_{t+1}f(k_t) - \psi(k_t, b_t), \theta(k_t, b_t))$$

**Démonstration.** Remarquons en premier qu'un contrat postulant  $\mathcal{A} = [\underline{\alpha}, \varphi_t]$  satisfait bien les deux conditions de révélation de la proposition 1 ainsi que la condition (NE) de la proposition 2 puisque d'une part  $\theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1}) \leq \theta(k_t, b_t) \forall \alpha_{t+1} \in [\underline{\alpha}, \varphi_t]$  et d'autre part le transfert est bien non décroissant

---

<sup>8</sup>Nous allégeons dorénavant les notations en remplaçant les variables  $\varphi(k_t, b_t)$ ,  $\theta(k_t, b_t)$  et  $\psi(k_t, b_t)$  par  $\varphi_t$ ,  $\theta_t$ , et  $\psi_t$  respectivement. Les deux dernières variables ne doivent pas être confondues avec les fonctions de transfert  $\theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1})$  et  $\psi(k_t, b_t, \alpha_{t+1})$ . Nous conservons à cet effet les notations originales quand un risque de confusion existe.

en  $\alpha_{t+1}$  sur  $[\underline{\alpha}, \varphi_t]$ . Notons que ces deux conditions impliquent seulement la contrainte

$$\varphi_t \leq [\theta(k_t, b_t) + \psi(k_t, b_t)]/f(k_t) \quad (1)$$

sur le seuil d'audit.

La condition d'assurance optimale de la proposition 3 implique, dans le cas  $\mathcal{A} = [\underline{\alpha}, \varphi_t]$ , le résultat:

$$\varphi_t > [\theta(k_t, b_t) + \psi(k_t, b_t)]/f(k_t), \quad (2)$$

ce qui viole la condition (NE) à travers l'équation (1). En effet, la proposition 3 implique l'égalité entre l'utilité marginale dans les états audités et la moyenne des utilités marginales dans les états non audités. La richesse délivrée à l'agent dans l'état non audité le plus faible devrait donc être inférieure à la richesse minimale dans les états audités si  $c'(a) > 0$ . De plus, le résultat  $\mathcal{A} = [\underline{\alpha}, \varphi_t]$  doit être vrai quel que soit le schéma optimal d'assurance. Il s'en suit que la condition (1) doit être serrée à l'équilibre. Il reste à montrer que si  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  alors un sous-espace compact audité  $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$  satisfait nécessairement  $\min \mathcal{I} = \underline{\alpha}$ . On aura alors également montré que  $\mathcal{A} = \mathcal{I}$  puisque deux ensembles compacts différents ne peuvent partager la même borne inférieure. Supposons par l'absurde que  $\mathcal{I} = [\iota_t, \varphi_t]$  avec  $\iota_t > \underline{\alpha}$ . La condition de révélation de la proposition 1 implique que  $\theta(k_t, b_t, \varphi_t) \leq \theta(k_t, b_t)$ . La condition d'assurance de la proposition 4 entraîne quant à elle:

$$\theta(k_t, b_t, \varphi_t) = \varphi_t f(k_t) - \psi(k_t, b_t) > \iota_t f(k_t) - \psi(k_t, b_t) = \theta(k_t, b_t, \iota_t)$$

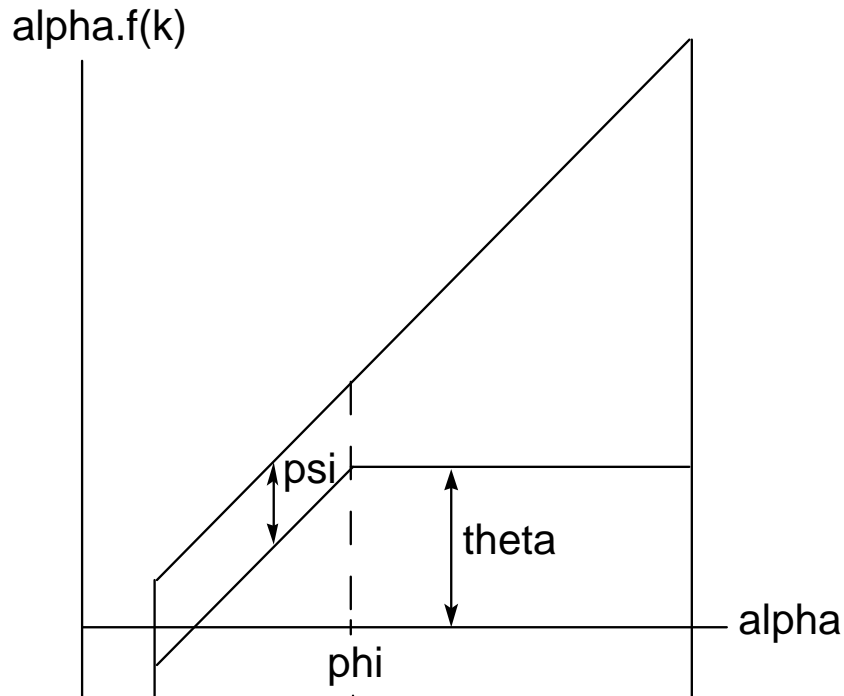
Comme  $\iota_t > \underline{\alpha}$ , il existe  $\alpha_{t+1} \in [\underline{\alpha}, \iota_t] \subset \mathcal{B}$  tel que  $\theta(k_t, b_t) > \theta(k_t, b_t, \alpha_{t+1})$  alors que  $\alpha_{t+1} < \iota_t$ , ce qui viole la condition (NE) de non décroissance du transfert.  $\square$

La variable  $\varphi_t$  est le seuil de  $\alpha_{t+1}$  en dessous duquel le principal audite l'annonce de l'entrepreneur. Rappelons que  $\psi_t$  est la richesse minimale garantie par le contrat dans les états les plus défavorables et  $\theta_t$  est le transfert constant opéré entre l'agent et le principal en cas de non-vérification. Le seuil  $\varphi_t$  est donc établi au point où le niveau de production est juste suffisant pour assurer le transfert  $\theta_t$  tout en garantissant la richesse minimale  $\psi_t$  à l'entrepreneur.

La proposition 5 s'explique de la manière suivante. Nous avons vu avec la proposition 3 que l'asymétrie d'information *ex post* empêche l'agent de bénéficier d'une assurance complète de la consommation dans la mesure où il est coûteux pour le principal d'inspecter l'ensemble des états de la nature. La condition (NE) de non décroissance du transfert impose des contraintes supplémentaires sur les possibilités d'assurance. L'égalité entre la moyenne conditionnelle des utilités marginales des états non inspectés et

l'utilité marginale des états inspectés (condition (ii) de la proposition 3) implique en effet que le transfert opéré dans l'état inspecté le plus élevé doit être supérieur à celui accordé dans les états non inspectés.

La condition (NE) interdit une telle possibilité. A défaut, le contrat minimise les écarts de richesse entre les états de la nature audités et ceux non audités en égalisant le transfert audité le plus élevé et le transfert constant non audité. Un exemple graphique de contrat optimal est présenté dans la figure suivante avec  $\theta(k_t, b_t) > 0$  et  $\psi(k_t, b_t) > -L$ :

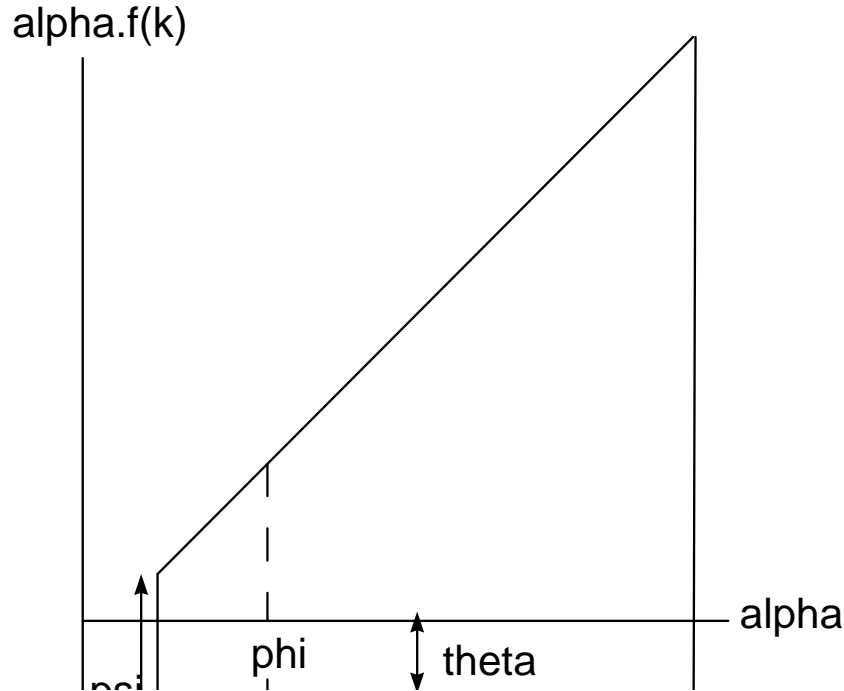


Le contrat financier quand l'agent est débiteur

La production et sa répartition contractuelle entre les deux parties sont représentées en fonction de la valeur de l'aléa productif. La zone supérieure revient à l'entrepreneur, le complément au principal. Il existe une première région d'audit dans laquelle la richesse contractuelle de l'agent est fixe, suivie d'une seconde région non auditée et caractérisée par un transfert constant en direction du principal.

Si l'agent a accumulé suffisamment de richesse pour financer intégralement l'investissement et sa consommation, il peut placer ses excédents  $b_t < 0$  au facteur sans risque auprès du principal. Un titre au rendement certain n'entraîne toutefois pas une assurance optimale en présence d'un risque sur l'autre segment de la richesse de l'agent. L'entrepreneur peut en effet réduire son risque en demandant une assurance des états productifs les plus faibles.

La richesse garantie  $\psi(k_t, b_t) > \alpha f(k) - Xb_t$  lui fournit cette assurance. Le contrat financier avec  $\theta(k_t, b_t) < 0$  est alors:



Le contrat financier avec l'agent créditeur.

L'association des conditions (NE) et de révélation permettent par conséquent l'obtention d'un contrat de dette assorti d'une richesse minimale garantie dans les états inspectés.

### 3 Les conditions d'optimalité de l'agent

Les conditions d'optimalité du capital, de l'endettement et du minimum de richesse garanti sont maintenant présentées. Parmi les trois variables  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  caractérisant le contrat financier, les deux premières sont déterminées directement par la condition de non-arbitrage du principal et par la définition de  $\varphi$ . Il reste donc réellement trois inconnues qui sont le capital, la dette et la richesse garantie. Nous commençons dans un premier temps par étudier les conditions du premier ordre de la dette et du capital puis nous abordons la détermination de la richesse garantie.

Les conditions d'optimalité du capital et de l'endettement du programme (P2) peuvent être trouvées en substituant  $\varphi$  dans la condition de non-arbitrage (NA) puis  $\varphi$  et  $\theta$  dans l'objectif de l'entrepreneur. La condition de non-arbitrage exprime implicitement  $\theta$  en fonction de  $b, k$  et  $\psi$  ce

qui donne la fonction implicite  $\theta(k, b, \psi)$ . Posons également la fonction  $\varphi(k, b, \psi) = [\theta(k, b, \psi) + \psi]/f(k)$ . L'objectif à maximiser devient, en faisant abstraction de la contrainte de positivité de la consommation:

$$V(a) = \max_{\{b, k, \psi\}} \left\{ \begin{array}{l} U(a + b - k) + \beta G(\varphi(k, b, \psi))V(\psi) \\ + \beta \int_{\varphi(k, b, \psi)}^{\bar{\alpha}} V(\alpha^d f(k) - \theta(k, b, \psi)) dG(\alpha^d) \end{array} \right\}$$

Nous pouvons désormais maximiser l'objectif par rapport aux variables de décisions.

### 3.1 La condition d'optimalité de la dette

La condition du premier ordre sur  $b$  est après simplification:

$$U'(c) = \beta \theta_b(k, b, \psi) \int_{\varphi(k, b, \psi)}^{\bar{\alpha}} U'(c^d) dG(\alpha^d) \quad (3)$$

dans laquelle la consommation de demain est égale à:

$$c^d = \alpha^d f(k) - \theta(k, b, \psi) - k^d.$$

La variable  $\theta_i(k, b, \psi)$  représente la dérivée par rapport à l'argument  $i = k, b, \psi$  et est indépendante de l'aléa  $\alpha^d$ .

L'équation (3) est la condition d'Euler de l'entrepreneur décrivant implicitement son comportement d'épargne. D'après la condition de non-arbitrage (NA),  $\theta_b(k, b, \psi)$  est positif: une augmentation de  $b$  accroît  $\theta$  à  $k$  et  $\psi$  donnés.  $\theta(k, b, \psi)$  étant le paiement constant échangé entre le principal et l'agent,  $\theta_b(k, b, \psi)$  est le facteur d'intérêt risqué de la dette ou le rendement de l'épargne si l'agent est créancier. A l'équilibre, l'entrepreneur doit être indifférent entre consommer une unité supplémentaire aujourd'hui et l'épargner (ou réduire son endettement si  $b \geq 0$ ) au prix de  $\theta_b(k, b, \psi)$  pour la consommer demain. Toutes choses égales par ailleurs, si  $b \geq 0$ , une réduction marginale de l'endettement diminue le passif exigible non-audité de  $\theta_b(k, b, \psi)$  la période suivante, ce qui accroît d'autant l'utilité marginale de la consommation.

Si  $b < 0$ , un accroissement marginal de l'épargne augmente l'actif non-audité de  $\theta_b(k, b, \psi)$  avec des effets identiques sur l'utilité marginale de demain. Remarquons que l'effet initial sur  $\theta$  d'une hausse de  $b$  est amplifiée par la variation endogène de la probabilité d'audit  $\varphi$  et les coûts d'agence qui y sont liés.

### 3.2 La condition d'optimalité du capital

La condition du premier ordre sur le capital est:

$$U'(c) = \beta \int_{\varphi(k,b,\psi)}^{\bar{\alpha}} U'(c^d) [\alpha^d f'(k) - \theta_k(k, b, \psi)] dG(\alpha^d)$$

En utilisant (3), nous obtenons la condition statique:

$$\int_{\varphi(k,b,\psi)}^{\bar{\alpha}} U'(c^d) [\alpha^d f'(k) - \theta_k(k, b, \psi) - \theta_b(k, b, \psi)] dG(\alpha^d) = 0 \quad (4)$$

Pour des valeurs de  $\psi$  et  $b$  données, un accroissement marginal de l'investissement fait varier le transfert entre le principal et l'agent de  $\theta_k$ . En utilisant la condition de non-arbitrage (NA) ainsi que la relation  $\varphi = (\theta + \psi)/f(k)$ , et en supposant que  $\varphi > \underline{\alpha}$  (si  $\varphi = \underline{\alpha}$ , on a simplement  $\theta_k = 0$ ), la pente implicite est:

$$\frac{d\theta}{dk} = - \frac{\int_{\underline{\alpha}}^{\varphi} [\alpha^d f'(k) - z_k] dG(\alpha^d) - z g(\varphi) \varphi_k}{1 - G(\varphi) - z g(\varphi) \varphi_\theta}$$

Le sens de variation peut être signé si  $z$  n'est pas trop important. Dans ce cas, le numérateur de la fraction est positif sachant que la hausse de l'investissement réduit le seuil de faillite:  $\varphi_k < 0 \forall \varphi > \underline{\alpha}$ . Le dénominateur est également positif:  $\varphi_\theta < 0 \forall \varphi > \underline{\alpha}$ . Donc si  $z$  n'est pas trop élevé,  $d\theta/dk < 0$ . La hausse du capital accroît dans ce cas la production qui revient au principal dans les états défavorables, ce qui réduit par compensation le transfert  $\theta$  dans les autres états.

L'accroissement de l'investissement entraîne également une variation négative de l'épargne reflétée par le terme  $\theta_b(k, b, \psi)$  avec les mêmes interprétations que pour la condition (3). Au total, l'impact d'une hausse du capital sur le facteur d'intérêt implicite  $R = (\theta/b)$  est ambigu. D'un côté, la hausse du capital réduit  $\theta$  et donc  $R$  à  $b$  donné. De l'autre, la hausse de  $b$  augmente  $\theta$  mais a un effet ambigu sur  $(\theta/b)$ . Pour que le capital optimal soit correctement défini à l'équilibre, le coût implicite du capital doit être positif, soit  $\theta_k(k, b, \psi) + \theta_b(k, b, \psi) > 0$ . L'exercice numérique réalisé dans la suite satisfait toujours cette condition.

### 3.3 La richesse garantie optimale

Le choix de la richesse minimale  $\psi$  est un équilibre entre deux considérations contraires. Un plus grand  $\psi$  permet d'étendre l'assurance des états défavorables. A l'extrémité, l'assurance parfaite est atteinte si tous les états de la nature sont audités par le principal ce qui implique  $\psi(k, b, \alpha^d) = \psi(k, b) \forall \alpha^d \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ . En se servant de la condition de non-arbitrage (NA), la richesse garantie est simplement dans ce cas  $\psi(k, b) = E(\alpha^d) f(k) - z(k) - Xb$ . A l'équilibre, la consommation est donc elle-même constante au cours du temps. Les coûts d'une assurance parfaite sont les dépenses d'audit  $z(k)$  qui

augmentent le taux d'intérêt de la dette si l'agent est débiteur ou réduise celui du placement dans le cas où l'entrepreneur a une position créditrice vis à vis du principal.

D'un autre côté une richesse  $\psi$  plus faible réduit la probabilité d'être audité et donc les coûts de vérification moyens inclus dans la prime de risque  $\theta/b - X$ . Si la collatéralisation parfaite est possible ( $\underline{\alpha}f(k) + L \geq Xb$ ), le résultat peut n'être jamais audité et la prime de risque est nulle dans ce cas. En contre-partie, la richesse croît proportionnellement avec la production réalisée, ce qui rend plus difficile pour l'entrepreneur le lissage de la consommation entre les états de la nature. La réduction de  $\psi$  entraîne par conséquent une consommation plus élevée en moyenne mais également plus variable. Pour illustrer ce mécanisme, annulons la dérivée de la fonction valeur par rapport à  $\psi$ <sup>9</sup>:

$$G[\varphi(k, b, \psi)]U'(\bar{c}^d) - \int_{\varphi(k, b, \psi)}^{\bar{\alpha}} U'(c^d)\theta_\psi(k, b, \psi)dG(\alpha^d) = 0 \quad (5)$$

avec  $\bar{c}^d$  la consommation constante obtenue dans les états audités. L'équation illustre l'arbitrage lié au choix de  $\psi$ . D'un côté sa hausse marginale permet d'accroître l'utilité de  $U'(\bar{c}^d)$  sur l'ensemble des états les plus défavorables audités. De l'autre, l'augmentation de  $\psi$  accroît le remboursement dans les états non audités de  $\theta_\psi(k, b, \psi) > 0$ .

## 4 L'économie simulée

Nous commençons par présenter les objectifs poursuivis par la simulation des règles de décision, puis nous décrivons l'application numérique avant d'aborder les résultats trouvés.

### 4.1 Motivation

L'objectif de la simulation est d'étudier le rôle de l'hypothèse d'aversion au risque de l'entrepreneur sur la sensibilité de son investissement. Comme nous l'expliquons dans la section précédente, un degré d'aversion au risque plus élevé rend l'agent moins tolérant vis à vis de l'incertitude sur sa consommation. A niveau donné de richesse, ce facteur l'incite à opérer sur une échelle productive plus petite toutes choses égales par ailleurs. Un choc négatif de fonds propres accroît dans ce contexte la variabilité des profits et de la consommation et réduit l'investissement.

---

<sup>9</sup>Le raisonnement suivant n'est pas complètement rigoureux. En effet, nous montrons en annexe que le problème n'est pas toujours nécessairement concave par rapport à cette variable.

Le résultat final est toutefois compliqué par le fait que degré d'incertitude auquel fait face l'agent est endogène et dépend d'une part de l'ampleur de l'assurance fournie par le contrat sous la forme d'une richesse minimale garantie et d'autre part de la richesse moyenne accumulée au cours du temps et qui sert de tampon contre les chocs défavorables. Un degré d'aversion à l'égard du risque important favorise la demande d'assurance de l'agent, quelle que soit la forme prise. L'assurance est cependant toujours coûteuse: l'assurance contractuelle entraîne des coûts de vérification et la demande d'épargne de précaution est limitée par le degré de préférence pour le présent de l'agent.

La relation entre sensibilité de l'investissement aux chocs et aversion à l'égard du risque est donc *a priori* ambiguë. L'ampleur de l'assurance réalisée peut toutefois être bornée numériquement. L'assurance contractuelle est fixée par l'estimation des coûts de faillite et l'épargne de précaution est limitée par le ratio moyen des fonds propres sur l'investissement. L'objectif n'est toutefois pas d'estimer quantitativement les effets sur l'investissement. Une entreprise de quantification nécessiterait une modélisation plus fine du processus de production et de résoudre des problèmes d'agrégation des comportements individuels qui sont hors de portée de ce papier <sup>10</sup>.

## 4.2 L'application numérique

Afin de faciliter l'obtention d'une solution numérique, nous posons des formes fonctionnelles simples. Nous supposons à cette fin que la fonction d'utilité est caractérisée par une aversion relative au risque constante et que la fonction de production est de type Cobb-Douglas à rendements décroissants. De plus, l'aléa est uniformément distribué sur son ensemble et les coûts d'audit sont pris linéaires par rapport au capital:

$$\begin{aligned} U(c) &= \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \sigma > 0 \\ \alpha f(k) &= \alpha k^\gamma, \gamma \in ]0, 1[ \\ G(\alpha) &= \frac{\alpha - \underline{\alpha}}{\bar{\alpha} - \underline{\alpha}} \\ z(k) &= \mu k, \mu > 0 \end{aligned}$$

Le modèle est étalonné sur une base trimestrielle. Concernant la taille des rendements d'échelle, Basu et Fernald (1997) estiment des rendements d'échelle proches de l'unité. Des rendements d'échelle très proches de l'unité impliquent dans le modèle une sensibilité forte de l'investissement aux variations du coût d'opportunité des fonds et conduisent à une instabilité numérique.

---

<sup>10</sup>Voir Krusell et Smith (1998) pour la résolution d'un modèle avec agents hétérogènes en équilibre général.

Nous choisissons donc volontairement de réduire cette sensibilité et prenons une valeur de  $\gamma$  égale à 0,85. La valeur précise a toutefois des conséquences négligeables sur les réponses aux questions qualitatives que nous nous posons dans cette section.

Nous prenons une élasticité de substitution  $\sigma$  proche de 1, qui se trouve dans la rangée des valeurs généralement acceptées (Mehra-Prescott (1984)), un facteur sans risque de 1,02, un degré d’impatience  $\beta$  égal à 0,975. Le produit  $\beta X = 0,9945$  est inférieur à un pour des raisons d’ergodicité du problème. En effet, le facteur  $X$  ne représente réellement le coût d’opportunité des fonds de l’agent que si sa richesse est arbitrairement grande. L’impact du risque de l’entreprise sur la richesse est alors infime et l’agent se comporte comme si sa richesse suivait une loi déterministe. Cela le conduit dans ce cas à désépargner puisque  $\beta X < 1$ . Si à l’inverse sa richesse est limitée, le coût d’opportunité de ses fonds intègre une prime de risque si l’entreprise a une probabilité de faillite positive, ce qui conduit cette fois l’agent à épargner. Cependant, même en l’absence d’un risque de faillite, la variabilité de sa consommation crée une demande d’épargne-tampon (Hugget (1993), Aiyagari (1994)). Ces forces opposées aux deux extrêmes de la richesse assurent la propriété d’ergodicité de l’espace de la richesse de l’agent. Le cas inverse  $\beta X \geq 1$  conduirait à une demande infinie d’épargne de précaution.

Nous prenons dans la suite une limite de richesse  $L = 0$ <sup>11</sup>. Etant donnée cette valeur et celle du degré d’impatience de l’entrepreneur, la borne d’endettement est déterminée de manière à obtenir en moyenne un ratio endettement sur capital d’à peu près 1/2, en accord avec la valeur prise par les modèles calibrés d’accélérateur financier de type Carlstrom-Fuerst (1998).

Les coûts de vérification sont égaux à 15% de l’actif qui est une valeur moyenne dans la littérature traitant de l’accélérateur financier. La moyenne du choc individuel est normalisée à 1. L’écart-type de la loi uniforme est alors fixé par une des deux bornes de l’intervalle de  $\alpha$ . Celui-ci est généralement calibré dans la littérature de manière à reproduire le taux de faillite de l’économie. Ce dernier est en effet important puisqu’il détermine les coûts d’agence moyens qui affectent l’investissement. Nous choisissons cependant de sélectionner un écart-type plus faible impliquant un taux de faillite nul à l’équilibre. Cela nous permet de montrer que les variations de l’investissement ne sont pas dues aux fluctuations du taux de faillite dans l’économie, comme dans les modèles traditionnels. Ce choix a par conséquent l’avantage d’isoler la contribution de l’hypothèse d’aversion à l’égard du risque. En résumé, les valeurs des paramètres de l’économie de référence

---

<sup>11</sup>Cette limite ne doit pas être confondue avec la borne supérieure d’endettement. La contrainte  $L = 0$  signifie que l’agent ne peut pour s’endetter collatéraliser ses revenus futurs au delà de la production à venir. Il peut donc s’endetter pour investir d’où une borne d’endettement négative dans l’application numérique.

sont:

$\gamma$	$\sigma$	$X$	$\beta$	$\mu$	$E(\alpha)$	$\bar{\alpha}$	$L$
0,85	1,05	1,02	0,975	0,15	1	1,15	0

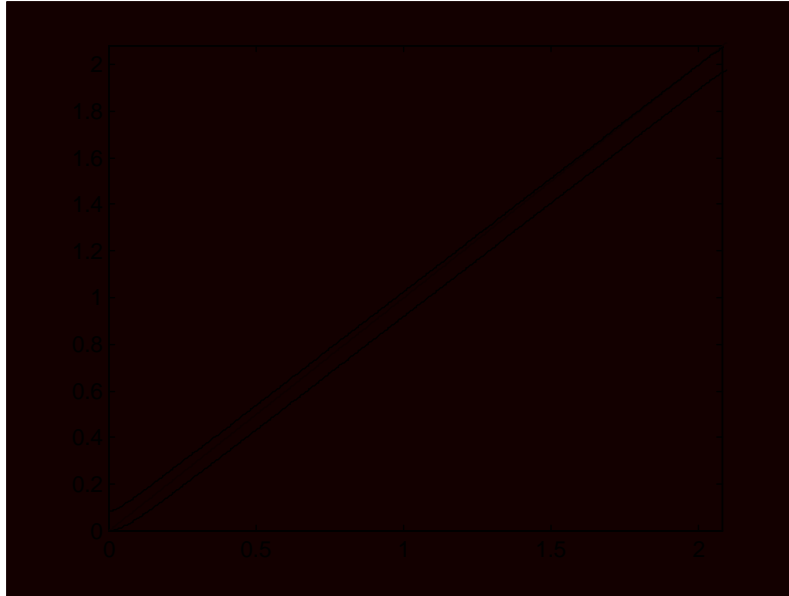
La méthode de résolution est indiquée en annexe et consiste à trouver les règles de décision du capital, de la dette, de la consommation et de la richesse contractuelle garantie en fonction de la richesse courante de l'agent.

## 5 Les résultats

Nous commençons par décrire les propriétés générales du modèle de référence, puis nous présentons les résultats concernant le lien entre l'investissement et les fonds propres en niveau et en variation.

### 5.1 Les propriétés générales de l'économie de base

Le graphique suivant présente la loi d'évolution de la richesse de l'agent en fonction de l'aléa réalisé.



La loi d'évolution de la richesse de l'agent.

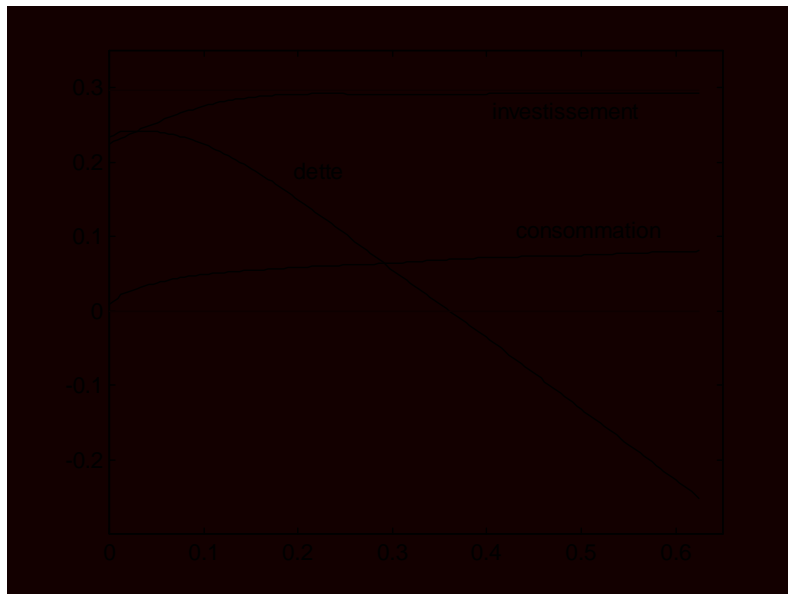
L'abscisse représente la richesse courante et l'ordonnée la richesse une période plus tard. Le trait fin est la droite à 45°. Comme indiqué au cours de la calibration, la probabilité de faillite de l'entreprise est nulle pour les valeurs considérées des paramètres. La loi d'évolution est donc donnée par:

$$a_{t+1} = \alpha_{t+1}k(a_t)^\gamma - Xb(a_t) \quad (6)$$

La courbe supérieure représente la richesse future dans le cas où l'entreprise produit le montant maximal  $y_{t+1} = \bar{\alpha}k_t^\gamma$  et la courbe inférieure la richesse dans la situation la plus défavorable soit  $y_{t+1} = \underline{\alpha}k_t^\gamma$  égale à la richesse garantie  $\psi_t$ . Le graphique montre que la richesse ne peut croître ou décroître indéfiniment à la suite d'une série d'aléas favorables ou défavorables. Il montre également que la borne inférieure de richesse  $L = 0$  est rarement atteinte et nécessite une suite continue d'aléas défavorables. Ce qui ne signifie cependant pas que la limite de richesse  $L = 0$  a peu d'influence sur la dynamique de la richesse. Cela signifie au contraire que l'agent essaie la plupart du temps d'éviter cette zone de consommation faible.

Le modèle génère une épargne de précaution au sens de Hugget (1993, 1997) et d'Aiyagari (1994). En effet, une préférence marquée pour le présent conduit l'agent à désirer s'endetter indéfiniment. L'existence d'une borne supérieure d'endettement vient cependant l'en empêcher. De plus, la présence d'un risque de revenu non assuré le conduit à épargner un montant moyen supérieur à la limite inférieure de richesse afin de se protéger contre le risque d'une séquence défavorable de chocs productifs en puisant dans sa richesse pour consommer. Nous pouvons montrer de façon similaire à Aiyagari que le stock moyen d'épargne de précaution augmente avec l'aversion au risque de l'agent <sup>12</sup>.

Le graphique suivant présente les règles de décision de l'agent en fonction de sa richesse courante en abscisse.



<sup>12</sup>La différence est que l'absence d'assurance est ici endogène et résulte de la calibration de coûts d'audit. Ainsi, nous avons trouvé pour les valeurs des paramètres de l'économie de base que l'agent décide d'assurer une partie de son revenu à partir d'un degré d'aversion au risque égal à  $\sigma = 2,6$ .

## Les règles de consommation, d'investissement et d'endettement en fonction de la richesse

La ligne horizontale qui borne supérieurement l'investissement indique le niveau d'investissement avec information parfaite. La règle d'endettement n'est pas monotone. Elle est tout d'abord croissante avec la richesse. En effet, l'investissement et la consommation augmentent sensiblement dans la zone de richesse faible. Les dépenses de l'agent s'élèvent par conséquent plus vite que sa richesse et nécessitent transitoirement un recours accru à la dette. Puis la dette baisse continûment avec la richesse et se transforme finalement en placement net ( $b(a) < 0$ ). Les dépenses ne varient ensuite que marginalement, l'entrepreneur se désendette quasiment de un franc pour chaque franc supplémentaire épargné.

La consommation et l'investissement croissent tous deux avec la richesse mais obéissent à deux logiques différentes. L'aversion à l'égard du risque conduit l'agent, à consommation moyenne donnée, à préférer une consommation constante à un profil fluctuant. Deux raisons l'empêchent toutefois de lisser parfaitement sa consommation: l'absence d'assurance via un mécanisme coûteux d'audit des réalisations les plus faibles et un stock d'épargne moyen insuffisant. Le dernier facteur est à la fois cause et conséquence de la pente positive de la consommation: un stock de richesse insuffisant conduit l'agent à réduire sa consommation dans la zone de richesse faible tandis que la préférence pour le présent l'incite à consommer plus dans la zone de richesse élevée.

L'interprétation de la règle de capital nécessite un bref retour sur la loi qui le gouverne, ce que nous faisons maintenant.

### 5.2 Investissement et niveau des fonds propres

En reprenant la condition (4) en l'absence de risque de faillite, l'investissement est gouverné par l'équation simplifiée:

$$\int_{\underline{\alpha}}^{\bar{\alpha}} U' [\alpha^d f(k) - Xb - k^d] [\alpha^d f'(k) - X] dG(\alpha^d) = 0 \quad (7)$$

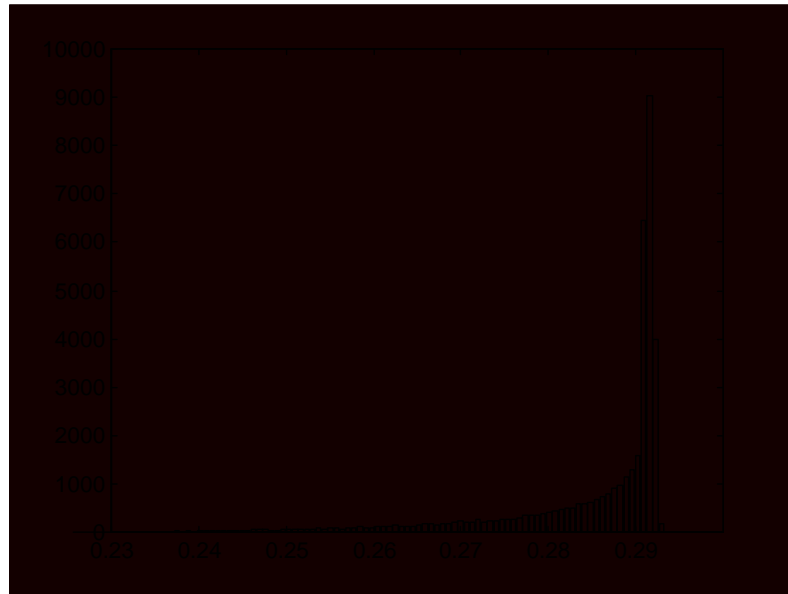
qui est une équation classique d'investissement avec risque productif non diversifiable en présence d'un placement alternatif sans risque. Le stock d'épargne étant insuffisant, l'agent ne peut pas complètement isoler sa consommation des mouvements de sa richesse et la consommation de demain est croissante avec l'aléa. Sa consommation est donc corrélée positivement avec le rendement du capital, ce qui réduit l'investissement par rapport au cas avec assurance parfaite. Cette corrélation positive le conduit à réclamer en contre-partie une prime de risque sur l'actif d'entreprise, ce qui est obtenu *via* un investissement plus faible.

Ainsi, une valeur faible des fonds propres accroît la variance de la consommation entre les états de la nature, augmentant la prime de risque (rendement espéré du capital moins taux sans risque) sur l'investissement. La prime est alors d'autant plus élevée et l'investissement d'autant plus faible que l'entrepreneur est averse à l'égard du risque.

Si l'équation (7) ressemble à une équation d'investissement agrégé, l'incertitude attachée au rendement est potentiellement plus néfaste sur l'investissement microéconomique qu'agrégé et cela pour deux raisons. D'une part la variance des chocs individuels est plus importante que celle des chocs agrégés. D'autre part, la corrélation entre la consommation et le rendement du capital est potentiellement plus forte en raison du lien étroit entre la richesse de l'entrepreneur et les actifs de l'entreprise. Pour ces deux raisons, l'impact sur l'investissement est donc *a priori* plus important.

Le graphique précédent montre que l'investissement est plus faible que son niveau avec information parfaite pour des niveaux de richesse suffisamment faibles. Les règles d'investissement et d'endettement n'informent cependant pas sur la fréquence avec laquelle l'agent se retrouve avec de tels niveaux de richesse. Pour regarder cela, nous avons simulé une trajectoire d'endettement et d'investissement sur 40000 périodes et calculé les distributions correspondantes de l'investissement et du ratio dette/capital.

Le graphique suivant présente la distribution stationnaire du capital dans l'économie de base:

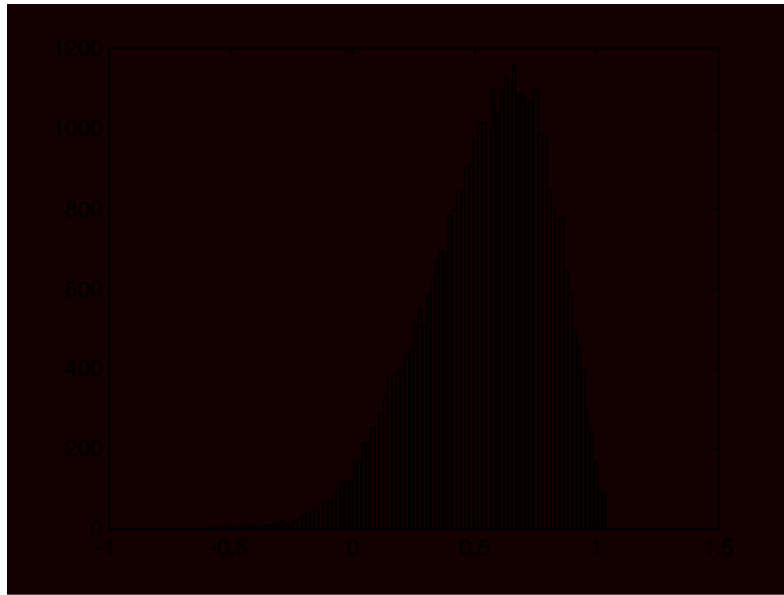


La distribution stationnaire du capital

Le montant moyen de capital est de 0.285 soit environ 4% en dessous du niveau avec information parfaite qui est de 0,296. La distribution est fortement asymétrique. La borne supérieure est très proche de son mode tandis

que la borne inférieure en est relativement éloignée. Cette dissymétrie reflète la forte non-linéarité de l'équation d'investissement. Une suite de chocs positifs n'accroît que très peu l'investissement qui est plafonné par sa valeur avec information parfaite, tandis qu'une suite d'aléas défavorables conduit l'agent à puiser dans sa richesse pour consommer. La baisse consécutive de la richesse accroît la volatilité de la consommation et la rapproche de zéro, ce qui a des effets conséquents sur l'investissement.

L'investissement dépend alors de la structure financière de l'entreprise dont nous présentons la distribution stationnaire:



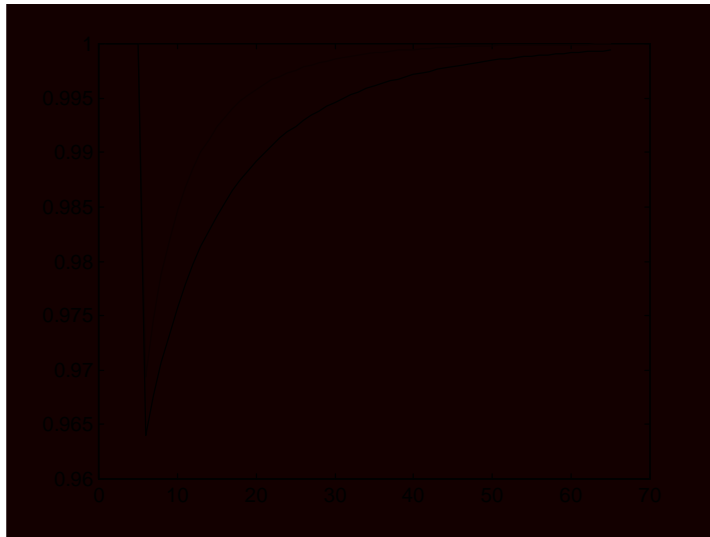
La distribution stationnaire du taux d'endettement (dette/capital).

La structure financière est ici définie par le ratio dette/capital. Sa moyenne est égale à 54,5%. Le ratio peut être supérieur à un si la dette finance intégralement le capital et une partie de la consommation de l'agent. Il peut également être négatif si l'agent a une position financière créditrice, c'est à dire place auprès du principal son excédent de richesse sous la forme d'un contrat de dette. Nous nous apercevons que la structure financière est beaucoup plus dispersée au cours du temps que l'investissement. L'agent utilise en effet la dette pour isoler les mouvements de sa consommation des fluctuations de sa richesse. Or l'équation d'investissement est uniquement sensible aux variations de la consommation. La distribution est également légèrement dissymétrique. Ainsi, contrairement aux modèles d'accélérateur financier reposant sur un lien direct entre structure financière et investissement *via* la probabilité de faillite, une structure financière dégradée ne se traduit pas nécessairement ici par un investissement faible.

Une manière plus directe d'étudier le lien entre investissement et fonds propres est de simuler la réaction de l'investissement à un choc de productivité. Cet exercice est réalisé dans la suite et va permettre d'analyser le rôle joué à cet égard par l'hypothèse d'aversion à l'égard du risque de l'entrepreneur.

### 5.3 Les conséquences de l'aversion au risque

Comment le profil de l'investissement est-il modifié par l'hypothèse d'aversion au risque de l'entrepreneur? Pour étudier cette question, nous simulons la réaction de l'investissement à une variation instantanée de la productivité. Nous supposons à cette fin que l'aléa est égal à sa moyenne excepté pendant une période durant laquelle l'aléa atteint sa borne minimale pour revenir ensuite à son niveau précédent. L'impact de l'aversion au risque est estimé en prenant deux valeurs distinctes du coefficient d'aversion au risque:  $\sigma = 0,6$  et  $\sigma = 1,35$ . Tous les autres paramètres sont inchangés. La réaction de l'investissement est présentée dans le graphique suivant:



La réponse de l'investissement à la suite d'un choc négatif (trait fin:  $\sigma=0,6$  et trait plein:  $\sigma=1,35$ ).

Les investissements stationnaires étant différents selon la valeur de  $\sigma$ , les deux niveaux d'investissement sont normalisés par leur niveau stationnaire respectif afin de mieux les comparer. Nous voyons que l'investissement recule en plus grande proportion quand l'entrepreneur est caractérisé par un degré plus élevé d'aversion au risque.

L'écart d'amplification entre les deux situations reste cependant limité. La faiblesse de l'investissement persiste toutefois beaucoup plus longtemps dans le cas  $\sigma = 1,35$ . Remarquons que la chute de l'investissement est

obtenue sans variation ni de la prime de risque apparente (puisque le taux de la dette est le facteur sans risque), ni du taux de faillite. Ce résultat suggère que les modèles de cycles financiers de type Carlstrom et Fuerst (1998) manquent un canal potentiellement important de propagation des chocs en calibrant les mouvements des coûts d'agence sur les variations du taux de faillite et de la prime de risque.

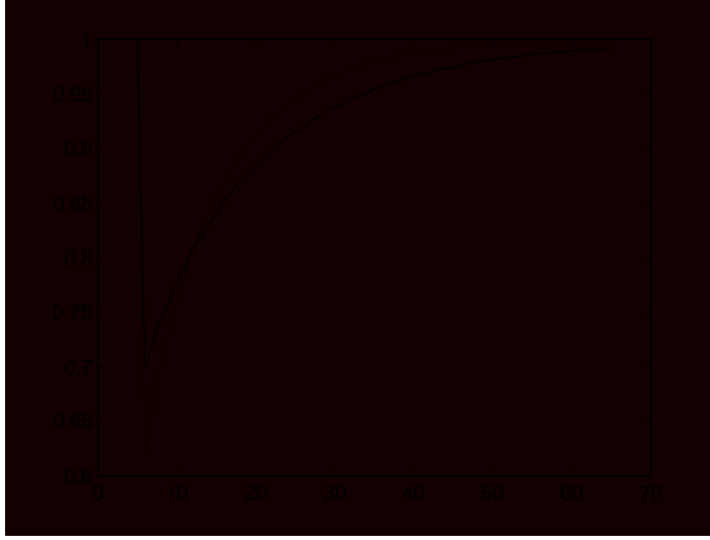
La persistance accrue de l'investissement dans le cas  $\sigma = 1,35$  s'explique par la réaction de la consommation qui est représentée dans le graphique suivant:



La réponse de la consommation à la suite d'un choc négatif (trait fin:  $\sigma=0,6$  et trait plein:  $\sigma=1,35$ ).

Notons en premier lieu que la réaction de la consommation est limitée par l'indépendance temporelle des aléas. En effet, dans une optique de revenu permanent, toute variation de la richesse est transitoire et ne modifie pas significativement la richesse intertemporelle de l'agent. Les variations de revenus sont donc dans leur majeure partie épargnées.

A la suite du choc négatif, un entrepreneur caractérisé par un degré de substitution intertemporel élevé (ici  $\sigma = 0,6$ ) accepte de réduire plus fortement sa consommation à la date du choc afin de reconstituer plus rapidement son épargne de précaution. A l'inverse, dans le cas  $\sigma = 1,35$ , l'entrepreneur désire lisser sa consommation au cours du temps et reste plus longtemps avec des fonds propres faibles. La contre-partie est, comme nous l'avons vu, un investissement qui reste plus longtemps déprimé en raison de la volatilité accrue de la consommation pour des montants faibles de richesse. Le graphique représentant le sentier de la richesse de l'entrepreneur montre que celle-ci adopte un profil similaire à celui de la consommation.



La réponse de la richesse à la suite du choc négatif (trait fin:  $\sigma=0,6$  et trait plein:  $\sigma=1,35$ ).

Le sentier de la richesse illustre son rôle de stabilisation de la consommation. Plus l'entrepreneur est averse à l'égard du risque et plus il puise transitoirement dans sa richesse pour amortir le choc sur la consommation.

Enfin, un effet supplémentaire sur l'investissement transite par l'aversion de l'entrepreneur à l'égard d'une consommation proche de zéro. Cet effet est potentiellement important ici puisque nous avons supposé une fonction d'utilité puissance. Une baisse de la richesse augmente le risque d'une consommation faible dans le futur immédiat. L'agent diminue ce risque en réduisant l'échelle de sa production, ce qui renforce la baisse de l'investissement. Notons toutefois que la taille de cet effet est ici contrôlé par la possibilité de l'entrepreneur d'assurer les états de la nature les plus défavorables.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce papier un modèle parcimonieux de consommation et d'investissement en présence d'imperfections financières. L'investissement d'équilibre est toujours inférieur à celui avec information parfaite et fluctue positivement avec l'épargne de l'entrepreneur. Nous avons volontairement retenu un exemple numérique simple dans lequel le principal n'assure pas une richesse minimale garantie à l'agent au delà de ce que lui fournit déjà la production minimale. Le résultat de l'entreprise n'est dans ce cas jamais audité et la chute de l'investissement est obtenue sans variation de la prime de risque (qui est nulle) et de la probabilité de faillite. Le modèle suggère en conséquence que les fluctuations de l'investissement attribuables aux imperfections financières peuvent être plus importantes que celles entraînées

par les variations du taux de faillite dans l'économie. Les modèles de cycles financiers de type Carlstrom et Fuerst (1998) manquent ainsi un canal potentiellement important de propagation des chocs en calibrant les mouvements des coûts d'agence sur les variations du taux de faillite et de la prime de risque.

Le modèle montre également qu'un degré supérieur d'aversion à l'égard du risque génère une amplification et une plus grande persistance des chocs. L'amplification, c'est à dire la réaction instantanée de l'investissement, est expliquée par la dispersion de la consommation de l'entrepreneur entre les états de la nature en raison du financement par contrat de dette. La dispersion de la consommation augmentant avec la réduction de sa richesse, cela a pour effet de réduire instantanément l'investissement. La persistance est principalement expliquée par le désir de l'entrepreneur de lisser sa consommation au cours du temps.

## Annexe. La méthode numérique de résolution

L'objectif de la méthode numérique est de trouver une approximation des règles de décision de la dette (ou du placement financier si l'agent est crédi- teur), du capital et de la richesse garantie  $\{b(a), k(a), \psi(a)\}$  fonctions de la variable d'état du modèle  $a$  et solution du programme (P2) (p. ??).

### Le transfert d'équilibre $\theta(k, b, \psi)$

Substituons l'expression de  $\varphi$  dans la condition de non-arbitrage (NA). L'utilisation des formes fonctionnelles permet alors d'obtenir après simplification l'expression de  $\theta$  et de  $\varphi$  en fonction des trois autres variables du modèle.

La variable  $\theta$  est la solution d'un polynôme du second degré dont les deux racines sont toujours dans les réels pour les valeurs considérées<sup>13</sup>. La valeur d'équilibre de  $\theta$  est la plus petite racine du polynôme. La racine la plus grande n'est en effet pas compatible avec l'hypothèse de marché concurrentiel. Nous trouvons:

$$\begin{aligned} \theta(k, b, \psi) &= \bar{\alpha}k^\gamma - \mu k - \psi - \sqrt{(\bar{\alpha}k^\gamma - \mu k - \psi)^2 - \Phi} \\ \text{avec } \Phi &= \psi^2 + 2\psi\mu k + 2Xb\bar{\alpha}k^\gamma + \underline{\alpha}^2k^{2\gamma} - 2\underline{\alpha}k^\gamma \\ \text{et } \varphi(k, b, \psi) &= \frac{\theta(k, b, \psi) + \psi}{k^\gamma} \end{aligned} \quad (8)$$

La valeur de  $\theta$  correspondante assure pour chaque  $(k, b, \psi)$  le rendement moyen  $X$  au principal.

<sup>13</sup>Dans le cas de racines complexes, la rémunération espérée du principal ne pourrait atteindre le coût d'opportunité de ses fonds. L'agent serait dans ce cas rationné (Williamson (1986, 1987a)).

**La règle  $k(a)$**

La règle  $k(a)$  est calculée à partir de la condition du premier ordre (4) avec les dérivées  $\theta_k(k, b, \psi)$  et  $\theta_b(k, b, \psi)$  explicitement obtenues à partir de l'expression (8) de  $\theta(k, b, \psi)$ . Partons des règles initiales  $b(a)$ ,  $k(a)$  et  $\psi(a)$  et allégeons les notations:  $\theta(a) \equiv \theta(k(a), b(a), \psi(a))$  ainsi que  $\varphi(a) \equiv \varphi(k(a), b(a))$ . La règle de consommation d'aujourd'hui est:

$$c(a) = a - k(a) + b(a) \quad (9)$$

En se servant de (9), la règle de la période suivante, fonction de  $a$  et continue à  $\alpha$  est:

$$c^d(a, \alpha^d) = \begin{cases} c[\psi(a)] & \text{si } \alpha^d < \varphi(a) \\ c[\alpha^d k(a)^\gamma - \theta(a)] & \text{si } \alpha^d \geq \varphi(a) \end{cases}$$

La règle de capital  $\tilde{k} = k(a)$  est alors définie implicitement par la condition du premier ordre:

$$\int_{\varphi(a)}^{\bar{\alpha}} U' [c^d(a, \alpha^d)] \left[ \alpha^d f'(\tilde{k}) - \theta_k(\tilde{k}, b(a), \psi(a)) - \theta_b(\tilde{k}, b(a), \psi(a)) \right] dG(\alpha^d) = 0 \quad (10)$$

Nous utilisons une méthode d'intégration numérique<sup>14</sup> pour calculer l'intégrale de cette équation. L'espace des valeurs de  $\alpha$  est discrétisé par  $N_\alpha$  points équidistants. Soit  $\mathcal{E}_\alpha = \{\alpha(j); j = 1, \dots, N_\alpha\}$  l'ensemble de ces points. L'intégrale (10) est alors approximée par la formule:

$$\sum_{j=l(a)}^{N_\alpha} U' [c^d(a, \alpha^d)] \left[ \alpha^d f'(\tilde{k}) - \theta_k(\tilde{k}, b(a), \psi(a)) - \theta_b(\tilde{k}, b(a), \psi(a)) \right] dG(\alpha^d) = 0 \quad (11)$$

avec le seuil de faillite approximé  $l(a)$  le plus petit  $\alpha(j) \in \mathcal{E}_\alpha$  tel que  $\alpha(j)f(\tilde{k}) > \theta(a) + \psi(a)$ .

**La règle  $b(a)$**

Nous utilisons une méthode d'itération sur la fonction valeur décrite notamment par Christiano (1989). Elle revient à calculer les valeurs approchées de la fonction valeur sur une grille resserrée de points parcourant l'espace des richesses initiales  $[\underline{a}, \bar{a}]$ . Définissons ainsi la grille  $\mathcal{E}_a = \{a(j); j = 1, \dots, N_a\}$ . Les points sont uniformément répartis et satisfont  $a(1) = \underline{a}$ ,  $a(N_a) = \bar{a}$  et  $a(j) = \underline{a} + (j - 1)\delta_a$  avec l'incrément

$$\delta_a = [a(N_a) - a(1)] / (N_a - 1).$$

---

<sup>14</sup>Nous cherchons à approximer une loi uniforme. La méthode la plus appropriée est par conséquent la méthode de quadrature Newton-Cotes avec la règle du milieu.

Les valeurs de la dette sont également discrétisées et sont tirées parmi l'ensemble  $\mathcal{E}_b = \{b(j_b); j_b = 1, \dots, N_b\}$  dans laquelle  $b(1) = \underline{b}$ ,  $b(N_b) = \bar{b}$ .  $\underline{b}$  est typiquement négatif et correspond à la valeur maximale de l'épargne financière de l'agent.  $\bar{b}$  est la limite d'endettement (voir l'annexe A). La contrainte de positivité de la consommation:  $a(j) + b(j_b) - k(a(j)) \geq 0$  impose une condition supplémentaire sur l'ensemble  $\mathcal{E}_b$  éventuellement serrée pour des valeurs faibles de  $a(j)$ .

Soient les règles initiales  $b(a)$ ,  $k(a)$  et  $\psi(a)$ . La fonction valeur discrétisée associée à ces règles est pour chaque  $a = a(j) \in \mathcal{E}_a$ :

$$V(a) = \left\{ \begin{array}{l} U[a + b(a) - k(a)] + \beta G[\varphi(a)] V[\psi(a)] \\ + \beta \int_{\varphi(a)}^{\bar{\alpha}} V[\alpha^d f(k(a)) - \theta(a)] dG(\alpha^d) \end{array} \right\} \quad (12)$$

La mise à jour de la règle  $b(a)$  utilise les règles données  $k(a)$  et  $\psi(a)$  et la fonction valeur  $V(a)$ . Elle consiste à trouver pour chaque  $a = a(j) \in \mathcal{E}_a$ :

$$b(a) = \arg \max_{b \in \mathcal{E}_b} \left\{ \begin{array}{l} U[a + b - k(a)] + \beta G[\varphi(k(a), b, \psi(a))] V[\psi(a)] \\ + \beta \int_{[\varphi(k(a), b, \psi(a))]}^{\bar{\alpha}} V[\alpha^d f(k(a)) - \theta(k(a), b, \psi(a))] dG(\alpha^d) \end{array} \right\} \quad (13)$$

L'intégrale du dernier terme de droite est approximée selon la même méthode que pour le capital.

### La règle $\psi(a)$

En comparaison du capital et de la dette, la détermination de la richesse garantie optimale rencontre deux difficultés. La première est la possibilité d'une solution en coin égale à  $\psi = \underline{\alpha} f(k) - Xb$  si le remboursement de la dette est parfaitement collatéralisable et  $\psi = 0$  dans le cas contraire. La seconde difficulté est l'impossibilité de recourir à la condition du premier ordre. En effet, l'objectif de l'agent n'est pas nécessairement toujours concave en  $\psi$ . Pour voir cela, annulons la dérivée première de la fonction valeur de l'agent par rapport à  $\psi$ :

$$G[\varphi(k, b, \psi)] U'(\bar{c}^d) - \int_{\varphi(k, b, \psi)}^{\bar{\alpha}} U'(c^d) \theta_\psi(k, b, \psi) dG(\alpha^d) = 0$$

La condition n'est pas toujours bien défini si la dérivée première n'est pas partout décroissante sur l'ensemble des  $\psi$  possibles. Prenons en effet le cas d'une dette parfaitement collatéralisable (mais pas nécessairement parfaitement collatéralisée). La limite de la dérivée première en  $\psi$  (5) si  $\psi$  tend vers sa borne inférieure  $\underline{\alpha} f(k) - Xb$  est dans ce cas:

$$- \int_{\underline{\alpha}}^{\bar{\alpha}} U'(c^d) \theta_\psi(k, b, \psi) dG(\alpha^d)$$

puisque  $\varphi(k, b, \psi)$  tend dans ce cas vers  $\underline{\alpha}$  et donc  $G[\varphi(k, b, \psi)]$  vers 0. La dérivée première est donc négative au voisinage de la borne à gauche. Par conséquent, si au moins une solution de (5) existe, celle-ci correspond à un minimum.

La détermination numérique de l'équilibre prend en compte ces caractéristiques. La fonction  $\psi(a)$  est ainsi directement calculée, comme la règle  $b(a)$ , à partir de la maximisation de la fonction valeur de l'agent. Soit l'ensemble  $\mathcal{E}_\psi = \{\psi(j_\psi); j_\psi = 1, \dots, N_\psi\}$ . L'espace discrétisé n'est pas fixe mais varie en fonction des autres règles de l'agent. La borne inférieure  $\psi(1)$  est la richesse garantie la plus faible et est donnée par la contrainte de participation limitée qui varie avec les valeurs de la richesse  $a = a(j) \in \mathcal{E}_a$ :  $\psi(1) = \max \{L, \underline{\alpha}f(k(a)) - Xb(a)\}$ .

En partant des fonctions  $k(a)$ ,  $b(a)$  et  $V(a)$ , la mise à jour de la règle  $\psi(a)$  provient de:

$$\psi(a) = \arg \max_{\psi \in \mathcal{E}_\psi} \left\{ \begin{array}{l} U[a + b(a) - k(a)] + \beta G[\varphi(k(a), b(a), \psi)] V(\psi) \\ + \beta \int_{\varphi(k(a), b(a), \psi)}^{\bar{\alpha}} V[\alpha^d f(k(a)) - \theta(k(a), b(a), \psi)] dG(\alpha^d) \end{array} \right\} \quad (14)$$

avec l'intégrale approximée numériquement selon la même méthode que pour le capital.

### La méthode d'itération

L'algorithme s'appuie sur des approximation successives et convergentes des règles de décision. Il se décompose en plusieurs étapes:

1. Choix des grilles  $\mathcal{E}_\alpha$ ,  $\mathcal{E}_a$  et  $\mathcal{E}_b$ .
2. Initialisation des règles de décision  $k(a)$ ,  $b(a)$  et  $\psi(a)$
3. Approximation du vecteur  $V(a)$  selon (12).
4. Mise à jour de  $b(a)$  en utilisant (13) et de  $k(a)$  en se servant de (11).
5. Détermination de  $\mathcal{E}_\psi$  et mise à jour de  $\psi(a)$  par (14).
6. Evaluation de la distance entre l'ancien vecteur de  $b(a)$  et sa mise à jour. Arrêt si la distance est "suffisamment petite", sinon retour à l'étape 3.

## Bibliographie

- AIYAGARI S. R. (1994) "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving" *Quarterly Journal of Economics* août.
- ANG J., WUH LIN J. & TYLER F. (1995) "Evidence on the Lack of Separation Between Business and Personal Risks Among Small Businesses" *Journal of Small Business Finance* 4, 197-210.
- BACCHETTA P., CAMINAL R. (2000) "Do Capital Market Imperfections Exacerbate Output Fluctuations ? " *European Economic Review* 44

(3), 449-468.

BASU S., FERNALD J. G. (1997) "Returns to Scale in U.S. Production: Estimation and Implications" *Journal of Political Economy* 105 (2), 249-83.

BEAUDRY P. GUAY A. (1996) "What do interest rates reveal about the functioning of real business cycle models?" *Journal of Economics, Dynamics and Control* (20), 1661-1682.

BERGER A.N., UDELL G. F. (1998) "The Economics of Small Business Finance: The Roles of Private Equity and Debt Markets in the Financial Growth Cycle" *Journal of Banking and Finance* 22, 613-673.

BERNANKE B., GERTLER M. & GILCHRIST S. (2000) "The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework" Woodford, M et Taylor, J Ed. *Handbook of Macroeconomics* vol. 1C (Elsevier).

BERNANKE B., GERTLER M. (1989) "Agency Costs, Net Worth and Business Fluctuations" *American Economic Review* 79, 14 - 31

BERNANKE B., GERTLER M., GILCHRIST S. (1996) "The Financial Accelerator and the Flight to Quality" *Review of Economics and Statistics* 78, 1-15.

BOYD J. H., SMITH B. D. (1994) "How Good Are Standard Debt Contracts? Stochastic versus Nonstochastic Monitoring in a Costly State Verification Environment" *Journal of Business* 67 (4), 539-561.

CARLSTROM C. T., FUERST T. S. (1997) "Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis" *American Economic Review* 87 (5), 893-910.

CARLSTROM C. T., FUERST T. S. (2000) "Monetary Shocks, Agency Costs and Business Cycles" *document de travail de la Banque Fédérale de Cleveland*, mars.

CARLSTROM C. T., FUERST T. S. (1998) "Agency Costs and Business Cycles" *Economic Theory* 12, 583-597.

CARPENTER R.E. FAZZARI S.M. PETERSEN B.C. (1994) "Inventory Investment, Internal-Finance Fluctuations, and the Business Cycle" *Brookings Papers on Economic Activity* 2.

CHANG C. (1990) "The Dynamic Structure of Optimal Debt Contracts" *Journal of Economic Theory* 52, 68-86.

CHRISTIANO L. J. (1989) "Solving a Particular Growth Model by Linear Quadratic Approximation and by Value Function Iteration" *Document de travail n° 9 de la Banque Fédérale de Minneapolis*.

COOLEY T. F., NAM. K. (1998) "Asymmetric Information, Financial Intermediation, and Business Cycles" *Economic Theory* 12, 599-620.

COOLEY T., QUADRINI V. (1999) "Financial Markets and Firm Dynamics" Université de Rochester.

COOPER R., EJARQE J. (1999) "Exhuming Q: Market Power vs. Capital Market Imperfections", non publié.

- DOWD K. (1992) "Optimal Financial Contracts" *Oxford Economic Papers* 44, 672-693.
- DUNN W. (1998) "Unemployment Risk, Precautionary Saving, and Durable Goods Purchase Decisions ", non publié.
- EBERLY J. (1994) "Adjustment of Consumers' Durable Stocks: Evidence from Automobile Purchases" *Journal of Political Economy* 102, 403-436.
- EICHENBAUM M. (1994) "Comment on Monetary policy and Bank Lending" Monetary Policy Mankiw Ed., University of Chicago Press.
- FAZZARI S., HUBBARD G. & PETERSEN B. (1988) "Financing Constraints and Corporate Investment" *Brookings Papers on Economic Activity* 1988:1, 142-206.
- FISHER J. (1994) "Credit Market Imperfections and the Heterogeneous Response of Firms to Monetary Shocks" Document de travail de l'Université de Western Ontario, mai.
- FISHER J. (1999) "Credit Market Imperfections and the Heterogeneous Responses of Firms to Monetary Shocks " *Journal of Money, Credit and Banking* 31 (2), 187-211.
- FRIEDMAN B. M., KUTTNER K. N. (1993) "Economic Activity and the Short-Term Credit Markets : An Analysis of Prices and Quantities" *Brookings Papers on Economic Activities* (2).
- FUERST T. S. (1992) "Liquidity, loanable funds, and real activity" *Journal of Monetary Economics* 29, 3-24.
- FUERST T. S. (1994) "The Availability Doctrine" *Journal of Monetary Economics* 34, 429-444.
- FUERST T. S. (1995) "Monetary and Financial Interactions in the Business Cycle" *Journal of Money, Credit and Banking* 27 (4), 1321 - 1353.
- GALE D. HELLMIG M. (1985) "Incentive-Compatible Debt Contracts : The One Period Problem" *Review of Economic Studies* LII, 647-663.
- GARINO G., SIMMONS P. J. (1998) "A Note on Costly State Verification Contracts with Risk Aversion" document de travail Université de York.
- GERTLER M. (1995) "Comment on Monetary and Financial Interactions in the Business Cycle" *Journal of Money, Credit and Banking* 27 (4), 1343 - 1353.
- GILCHRIST S., HIMMELBERG C. P. (1994) "Evidence on the Role of Cash Flow for Investment" *Journal of Monetary Economics*, 36 (3), 541-72.
- GREEN J., LAFFONT J.-J. (1986) "Partially Verifiable Information and Mechanism Design" *Review of Economic Studies* 52, 647-64.
- HARRIS M., RAVIV A. (1991) "The Theory of Capital Structure" *Journal of Finance* 46 (1), 297-355.

- HARRIS R., TOWNSEND R. (1981) "Resource Allocation Under Asymmetric Information" *Econometrica* 49, 33-64.
- HELLWIG M. (1998) "Risk Aversion and Incentive Compatibility with Ex Post Information Asymmetry" *Economic Theory*, à venir.
- HUGGETT M. (1993) "The Risk-Free Rate in Heterogeneous-Agent Incomplete-Insurance Economies" *Journal of Economics, Dynamics and Control* 17, 953-969.
- INNES R. (1993) "Financial Contracting under Risk Neutrality, Limited Liability and Ex Ante Asymmetric Information" *Economica* 60, 27-40.
- INNES R. D. (1987) "Limited Liability and Incentive Contracting with Ex Ante Action Choices" *Journal of Economic Theory* 52, 45-67.
- KAPLAN S. N., ZINGALES L. (1997) "Do Investment-Cash Flow Sensitivities Provide Useful Measures of Financing Constraints" *Quarterly Journal of Economics* 112 (1), 169-215.
- KASHYAP A., LAMONT O., STEIN J. (1994) "Credit Conditions and the Cyclical Behavior of Inventories" *Quarterly Journal of Economics* 109, 565-592.
- KRUSELL P., SMITH A. A. (1998) "Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy" *Journal of Political Economy* 106 (5), 867-896.
- LELAND H.P., PYLE D.H. (1977) "Informational asymmetries, financial structure, and financial intermediation" *Journal of Finance* 32 (2), 371-387.
- MODIGLIANI F. MILLER M. H. (1958) "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment" *American Economic Review* 48 (3), 261-97.
- MOOKHERJEE D., PNG I. (1989) "Optimal Auditing, Insurance, and Redistribution" *Quarterly Journal of Economics* 104, 399-415.
- MYERSON R. (1979) "Incentive Compatibility and the Bargaining Problem" *Econometrica* 47, 61-73.
- OLINER S. D., RUDEBUSCH G. (1996) "Monetary Policy and Credit Conditions: Evidence from the Composition of External Finance: Comment" *American Economic Review* 86 (1), 300-314.
- TOWNSEND R. (1979) "Optimal Contracts and Competitive Markets with Costly State Verification" *Journal of Economic Theory* 21, 265-293.
- WEBB D. C. (1992) "Two-Period Financial Contracts With Private Information and Costly State Verification" *Quarterly Journal of Economics*.
- WILLIAMSON S. D. (1987a) "Costly Monitoring, Loan Contracts, and Equilibrium Credit Rationing" *Quarterly Journal of Economics* 102, 135-146.